

1. СИСТЕМА РІВНЯНЬ ПОЛЯ

Поняття електричного та магнітного поля вводять для характеристики сил взаємодії між зарядами. Розрізняють два види електричних сил, які діють на будь-який заряд q з боку інших зарядів та пропорційні даному заряду: $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Перша з них, що зветься силою Кулона, пропорційна напруженості електричного поля \mathbf{E} , інша – сила Лоренца, діє тільки на заряд, що рухається, і пропорційна векторному добутку швидкості його руху \mathbf{v} та індукції магнітного поля \mathbf{B} . З цього співвідношення і визначають звичайно \mathbf{E} як силу Кулона, що діє на одиничний заряд незалежно від його швидкості, а магнітну індукцію \mathbf{B} як силу Лоренца, яка діє також на одиничний заряд, що рухається з одиничною швидкістю. У загальному випадку вектори \mathbf{E} та \mathbf{B} – функції чотирьох змінних: трьох просторових координат та часу, тобто для характеристики силової дії на заряд треба знати шість скалярних функцій координат \mathbf{r} та часу t .

Для повної характеристики електромагнітного поля в довільному середовищі вказаної пари векторних функцій $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ та $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ недостатньо. Необхідно ще дві: $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – вектор напруженості магнітного поля та $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ – вектор електричної індукції, які зв'язані з попередньою парою співвідношеннями:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}. \quad (1.1)$$

Тут ε та μ – відповідно діелектрична та магнітна проникності середовища, $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ (Ф/м) – діелектрична стала, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Гн/м) – магнітна стала, причому $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c = 3 \cdot 10^8$ (м/с), де c – швидкість світла в вакуумі, а їх відношення визначає так званий хвильовий опір вакууму $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi \approx 377$ (Ом). Необхідно також зазначити, що співвідношення (1.1) характеризують ізотропні середовища. Для анізотропних діелектрична та магнітна проникності можуть бути різними для різних напрямків. У цьому випадку для характеристики середовища використовують так звані тензори діелектричної та магнітної проникності середовища, що включають трійки параметрів $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ та μ_x, μ_y, μ_z , які є коефіцієнтами пропорційності у скалярних співвідношеннях (1.1), а відповідні вектори \mathbf{B} та \mathbf{H} , чи \mathbf{D} та \mathbf{E} не співпадуть між собою за напрямком.

Для графічного наочного зображення електричного й магнітного полів використовують силові лінії (рис. 1,а), дотичні до яких вказують напрямок відповідного вектора, а густина

пропорційна його величині. Не менш наочним є спосіб, зображений на рис. 1,б, який є більш інформативним через те, що у дискретних вузлових точках можна визначити не тільки напрямок векторів поля, але у певному масштабі і їх величину.

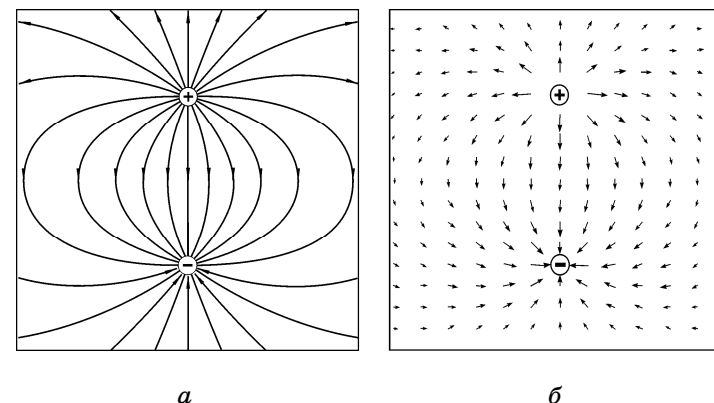


Рис. 1.1. Способи зображення векторних полів за допомогою силових ліній (а) та векторів для дискретного масиву точок (б)

Електричним та магнітним полям властивий *принцип суперпозиції*. Цей досить потужний принцип, який властивий польовій формі матерії, на відміну від речовинної, дозволяє незалежно розраховувати поля, що утворюються різними джерелами.

1.1. Рівняння Максвелла

Фундаментальною системою рівнянь, що описують електромагнітні поля, є рівняння Максвелла:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{j}, \quad (1.2,а)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t, \quad (1.2,б)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho, \quad (1.2,в)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0, \quad (1.2,г)$$

де \mathbf{j} – густина струму провідності (А/м²), $\mathbf{j} = \mathbf{e}_s \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta i/\Delta S)$, Δi – струм, що протікає через площину ΔS , перпендикулярну до ліній струму; \mathbf{e}_s – одиничний вектор нормалі до ΔS ; ρ – об'ємна густина заряду (Кл/м³); $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta q/\Delta V)$; Δq – заряд, що знаходиться в об'ємі ΔV . Величини ρ і \mathbf{j} – макроскопічні, які не враховують

дискретність заряду та ліній струму. Саме тому теорія поля, що заснована на цих рівняннях, є *макроскопічною*. Вектор густини струму залежить від провідності середовища й пропорційний напруженості електричного поля

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.3)$$

Коефіцієнт пропорційності σ (См/м) – питома електрична провідність середовища, яка для анізотропних середовищ є тензорною величиною, що включає компоненти $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Рівняння (1.1) та (1.3) називають іноді *матеріальними рівняннями*, бо вони встановлюють зв'язок між деякими векторами, які входять в рівняння Максвелла, через параметри ϵ, μ та σ , що характеризують середовище.

Рівняння (1.2) – це система *диференціальних рівнянь* в частинних похідних, яка може бути розв'язана лише за додаткових умов, що визначають спосіб збудження полів або задають поля на границях області, що розглядається.

Іноді зручніше користуватися рівняннями Максвелла, які записані у формі інтегральних співвідношень. Для такого представлення всі члени першого і другого рівнянь (1.2) скалярно домножимо на вектор $d\mathbf{S}$ і проінтегруємо по поверхні S , обмеженій замкненим контуром l . Використовуючи потім теорему Стокса (див. Додаток до гл.1) для заміни інтегралу по поверхні інтегралом по замкненому контуру (циркуляцією), одержимо

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} &= d(\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}) / dt + \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \\ \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -d(\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}) / dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

У правій частині цих рівнянь змінена послідовність диференціювання за часом і інтегрування по поверхні. Окрім того, оскільки визначений інтеграл по поверхні S вже не залежить від координат, частинна похідна за часом замінена на звичайну.

Якщо потім третє й четверте рівняння із (1.2) домножити на dV і проінтегрувати по об'єму V , обмеженому замкненою поверхнею S , то, скориставшись теоремою Остроградського-Гауса (див. додаток) для заміни інтеграла по об'єму інтегралом по замкненій поверхні (поток), одержимо

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV, \\ \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пари рівнянь (1.4) та (1.5) являють собою рівняння Максвелла в *інтегральній формі*.

Не має сенсу говорити про “виведення” рівнянь Максвелла з яких-небудь більш загальних закономірностей, тому що якраз ці рівняння являють собою найбільш фундаментальну систему рівнянь, яку має класична фізика для опису електромагнітних полів. Ця система була сформульована Максвеллом як узагальнення вже відомих законів електромагнетизму. Проілюструємо це кількома простими прикладами.

Приклад 1.1. Розглянемо прямий провідник, по якому протікає постійний ($\partial/\partial t = 0$) струм (рис. 1.2). Навколо провідника виникає магнітне поле, яке може бути розраховане з першого рівняння Максвелла в інтегральній формі:

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Для інтегрування виберемо поверхню S , обмежену контуром l у вигляді кола з радіусом r і центром на осі провідника і розташовану в площині, перпендикулярній до осі провідника. Використовуючи очевидний факт осової симетрії задачі, замінимо скалярний добуток векторів добутком їх довжин і винесемо H за знак інтеграла як величину, сталу вздовж контура інтегрування. Тоді $\oint_l dl = 2\pi r$, а інтеграл у правій частині дорівнюватиме повному струму i , який перетинає поверхню S , тому $H = i/2\pi r$. Дане співвідношення є виразом відомого закону для знаходження магнітного поля для провідника із струмом.

Приклад 1.2. У просторі, де є магнітне поле, розглянемо деякий дротяний контур l (рис. 1.3). Відповідно до другого рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -d(\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}) / dt$$

під дією змінного у часі магнітного поля у просторі виникає таке електричне поле, що його циркуляція дорівнює швидкості зміни інтегралу у правій частині, який є потоком Φ вектора магнітної індукції через поверхню (i не залежить від її форми), обмежену контуром. Для обраного контура інтеграл у лівій частині – це електрорушійна сила (ЕРС), що виникає у контурі, причому

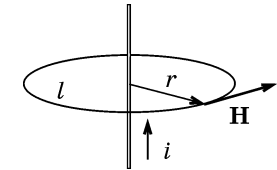


Рис. 1.2. Модель для розрахунку магнітного поля з осовою симетрією навколо провідника зі струмом

$\text{ЕРС} = -d\Phi/dt$, що є виразом закону електромагнітної індукції, встановленого Фарадеєм.

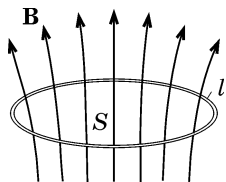


Рис. 1.3. До розрахунку ЕРС під дією змінного магнітного поля

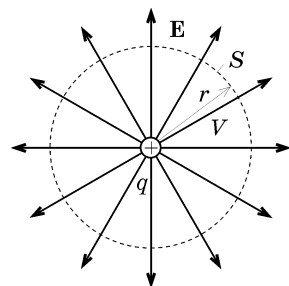


Рис. 1.4. Сферично симетричне поле точкового заряду

Приклад 1.3. Розглянемо точковий заряд q , навколо якого існує електричне поле, причому відповідно до третього рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\epsilon\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV.$$

Це рівняння, яке іноді називають теоремою Гаусса, вказує на те, що потік вектора напруженості електричного поля, домножений на $\epsilon\epsilon_0$, через замкнену поверхню, дорівнює повному заряду, що міститься в об'ємі, обмеженому цією поверхнею. Якщо за поверхню інтегрування вибрати сферу (рис. 1.4) з центром у місці розташування заряду, то очевидно, що через центральну симетрію вектори \mathbf{E} та $d\mathbf{S}$ колінеарні і напруженість постійна на всій поверхні інтегрування. Тому інтеграл у лівій частині дорівнює добутку E на поверхню сфери $4\pi r^2$, а інтеграл у правій частині – заряду q і $E = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2$. Якщо в електричне поле заряду q внести пробний заряд q' , то діюча на нього сила $F = q'E = qq'/4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2$. Даний вираз являє собою запис закону Кулона про взаємодію між зарядами.

Приклад 1.4. Четверте рівняння Максвелла $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ показує, що потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню дорівнює нулю, тобто вхідний потік дорівнює вихідному (рис. 1.5). Це означає, що магнітні

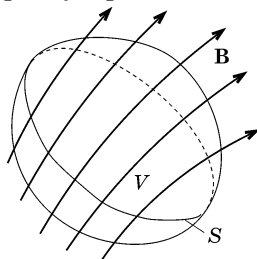


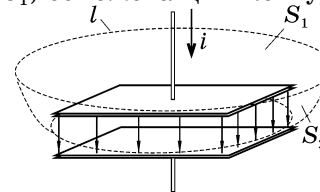
Рис. 1.5. Потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню

силові лінії завжди замкнені і не мають ні початку, ні кінця, як це може бути з електричним полем, силові лінії якого звичайно починаються або закінчуються на зарядах.

1.2. Струм зміщення.

У розглянутих елементарних прикладах поза увагою залишився перший доданок у правій частині першого рівняння Максвелла. Для того, щоб зрозуміти його зміст, проаналізуємо ще одну ситуацію.

Приклад 1.5. Розглянемо дві пластини конденсатора (рис. 1.6), у колі якого протікає струм i . Виберемо контур інтегрування l у вигляді замкненої лінії, що охоплює провідник. Якщо поверхня S_1 , обмежена цим контуром, перетинає провідник, то



$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S} = i.$$

Якщо виберемо іншу поверхню S_2 , обмежену цим же контуром, але яка проходить між пластинами конденсатора, то

Рис.1.6. Різні поверхні інтегрування спираються на той самий контур

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = d(\int_{S_2} \mathbf{D} d\mathbf{S}) / dt.$$

Однак результат не повинен залежати від вибору поверхні інтегрування, тому праві частини останніх виразів повинні бути рівними. Для цього і вводять поняття *струму зміщення*, яке є дещо незвичним, бо воно не пов'язане з переміщенням зарядів між пластинами, а тільки із зміною зарядів, що накопичуються на пластинах і викликають зміну напруженості електричного поля. У такому випадку струм провідності в колі конденсатора замикається струмом зміщення між його пластинами:

$$i_{\text{зм}} = d(\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}) / dt. \quad (1.6)$$

Густина струму зміщення

$$\mathbf{j}_{\text{зм}} = \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (1.7)$$

Струм зміщення можливий тільки за наявності нестационарних процесів в електричних полях, що змінюються у часі. Поняття струму зміщення вперше було введено Максвеллом і стало досить важливим кроком у розумінні властивостей

електромагнітного поля. Доцільність такого поняття стає зрозумілою при розгляді рівняння неперервності.

1.3. Рівняння неперервності.

З рівнянь Максвелла витікає ще одне важливе співвідношення. Для того, щоб його одержати, подіємо оператором div на всі члени першого рівняння в (1.2). Так як $\text{div}(\text{rot } \mathbf{H})$ тотожно дорівнює нулю (див. додаток), то

$$\text{div}(\partial \mathbf{D} / \partial t) + \text{div} \mathbf{j} = 0.$$

Змінюючи порядок диференціювання за часом і за просторовими координатами і враховуючи, що $\text{div} \mathbf{D} = \rho$, одержуємо

$$\partial \rho / \partial t + \text{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.8)$$

Цей вираз показує, що зміна густини просторового заряду в даній точці можлива лише за рахунок розбіжності (дивергенції) струму, і називається *рівнянням неперервності*, або *законом збереження заряду*. Остання назва стає особливо зрозумілою, якщо записати рівняння неперервності в інтегральній формі. Для цього домножимо обидва його доданки на dV і проінтегруємо по деякому об'єму V , обмеженому замкненою поверхнею. Використовуючи тому теорему Остроградського-Гаусса, одержуємо

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) + \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.9)$$

Зміст отриманого виразу полягає в тому, що швидкість зміни заряду усередині поверхні S дорівнює потоку вектора \mathbf{j} , тобто повному струму через цю поверхню.

Більш наочним стає рівняння неперервності, якщо записати його в дещо іншій формі. Підставляючи в (1.8) $\text{div} \mathbf{D}$ замість ρ , змінюючи порядок диференціювання та враховуючи вираз (1.7) для струму зміщення, одержимо

$$\text{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{зм}}) = 0. \quad 1.8, a)$$

Така форма запису рівняння неперервності означає, що подібно до силових ліній магнітного поля (див. приклад 4) лінії *повного* (провідності + зміщення) струму є неперервними та замкненими.

Розглянемо ще два окремих випадки, які ілюструють зміст рівняння неперервності і мають важливе значення в електронній техніці.

Приклад 1.6. Якщо в однорідному середовищі, яке характеризується питомою електропровідністю, якимось чином створити об'ємний заряд, то очевидно, що за рахунок струмів провідності цей заряд буде "розпливатися" доти, доки не розподілиться рівномірно по всьому об'єму, тобто до зникнення створюваного ним електричного поля. Це явище називається *релаксацією*, тобто поверненням до стану рівноваги. Проведемо кількісний аналіз процесу релаксації об'ємного заряду за допомогою рівняння неперервності, для чого замість густини струму підставимо його значення з (1.3), а замість $\text{div} \mathbf{E}$ – величину $\rho / \epsilon \epsilon_0$ із (1.1) (сталі величини $\epsilon \epsilon_0$ і σ можна винести за знак дивергенції). В результаті одержуємо диференціальне рівняння $\partial \rho / \partial t + \sigma \rho / \epsilon \epsilon_0 = 0$, розв'язком якого є експоненціальна функція (рис. 1.7):

$$\rho(t) = \rho(0) \exp(-t / \tau_m).$$

Величина $\tau_m \equiv \epsilon \epsilon_0 / \sigma$ характеризує швидкість спадання об'ємного заряду й називається *максвелловим часом релаксації*. Треба мати на увазі, що за час $\Delta t = \tau_m$ об'ємний заряд зменшується в $e \approx 2,7$ рази. Приблизно вважається, що об'ємний заряд повністю зникає на протязі часу, який дорівнює $(3 \dots 5) \tau_m$. В металах з високою провідністю цей час дуже малий, порядку $10^{-17} \dots 10^{-18}$ с. В діелектриках в залежності від їх провідності він дорівнює $10^{-2} \dots 10^{-6}$ с. Описане явище спостерігається, наприклад, у такій простій ситуації, як розряд конденсатора за рахунок струмів провідності, що протікають через ізолюючий діелектрик. Час розряду визначається параметрами діелектрика – діелектричною проникністю та питомою провідністю середовища.

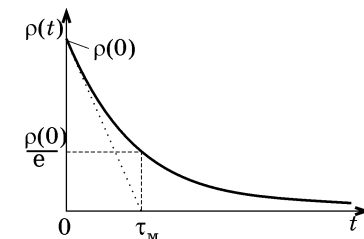


Рис.1.7. Експоненціальний спад густини просторового заряду в провідному середовищі

Приклад 1.7. Розглянемо вузол електричного кола (рис. 1.8), в якому сходяться декілька провідників, по яких протікають постійні струми i_1, \dots, i_n . Оточимо даний вузол деякою замкненою поверхнею S і скористаємося рівнянням неперервності (1.9). Оскільки при *постійних* струмах заряд усередині поверхні не накопичується і не зникає, перший доданок дорівнює нулю.

Другий доданок дорівнює повному струму, який протікає через поверхню S , тому

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (1.10)$$

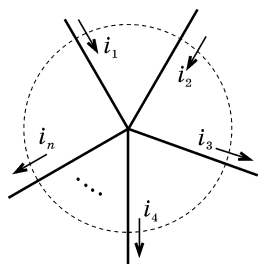


Рис.1.8. Сума постійних струмів через вузол дорівнює нулю

Це співвідношення є першим законом Кірхгофа і є одним з основних в теорії електричних кіл. Треба пам'ятати, що цей закон, строго кажучи, справедливий тільки для постійних струмів. Використання його для кіл змінного струму є наближенням і можливе за деяких умов, про які мова буде далі.

1.4. Баланс електромагнітної енергії.

Для висвітлення питання про види електромагнітної енергії та її видозмінення зробимо спочатку деякі формальні перетворення. Помноживши скалярно перше з рівнянь Максвелла (1.2) на \mathbf{E} , а друге на \mathbf{H} , віднімемо від другого перше і перенесемо всі члени рівняння в ліву частину:

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{H}(\partial \mathbf{B} / \partial t) + \mathbf{E}(\partial \mathbf{D} / \partial t) + \mathbf{j} \mathbf{E} = 0.$$

Перші два доданки можна замінити (див. додаток) дивергенцією векторного добутку \mathbf{E} на \mathbf{H} . Третє й четверте, вносячи перший співмножник під знак похідної та враховуючи (1.1), подамо у вигляді (скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює квадрату його довжини): $\partial(\mu\mu_0 H^2/2)/\partial t$ і $\partial(\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2)/\partial t$. Тоді

$$\operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + \partial(\mu\mu_0 H^2/2 + \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2)/\partial t + \mathbf{j} \mathbf{E} = 0. \quad (1.11)$$

Даний вираз – рівняння балансу електромагнітної енергії в диференціальній формі. В ньому векторний добуток $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \equiv \mathbf{P}$ називається вектором Пойнтінга і має розмірність $\text{В} \cdot \text{А} / \text{м}^2 = \text{Дж} / (\text{с} \cdot \text{м}^2) = \text{Вт} / \text{м}^2$. Фізичний зміст вектора Пойнтінга – це електромагнітна енергія, що проходить крізь одиничну площадку за одиницю часу і називається густиною потоку потужності. Доданки під знаком похідної по часу вимірюються у джоулях на кубічний метр ($\text{Дж} / \text{м}^3$), їх фізичний зміст – енергія в одиниці об'єму або густина енергії відповідно магнітного й електричного полів.

Останній доданок вимірюється також у ватах на кубічний метр ($\text{Вт} / \text{м}^3$) і характеризує втрати електромагнітної енергії на нагрівання. Величина $\mathbf{j} \mathbf{E}$ дорівнює кількості джоулевого тепла, яке виділяється в одиниці об'єму за одиницю часу.

Баланс електромагнітної енергії стає наочнішим, якщо записати (1.11) в інтегральній формі. Для цього всі члени (1.11) домножимо на dV і проінтегруємо по деякому об'єму V , обмеженому замкненою поверхнею S . Скориставшись теоремою Остроградського-Гауса, перейдемо для першого доданку до інтегрування по поверхні і одержимо

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \left[\int_V \left(\frac{\mu\mu_0 H^2}{2} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \right) dV \right] + \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV = 0. \quad (1.12)$$

Можна навести багато прикладів, в яких перетворення енергії описуються даним рівнянням балансу. Наприклад, у замкненому об'ємі (потік енергії через його стінки відсутній) електромагнітна енергія може тільки зменшуватись ($\partial/\partial t < 0$) за рахунок втрат на нагрівання (третій доданок). Якщо електромагнітна енергія залишається сталою ($\partial/\partial t = 0$), це означає, що усередину даного об'єму через поверхню існує потік енергії, який покриває втрати на нагрівання.

При розгляданні подібних прикладів може виникнути питання, звідки береться електромагнітна енергія, на яке важко дати відповідь без досить глибокого розглядання різноманітних процесів перетворення енергії. Але для формального уявлення про джерела енергії у рівнянні балансу їх можна змодельовати за допомогою так званих *сторонніх джерел* струму або джерел напруги. В першому випадку в третьому доданку під \mathbf{j} треба розуміти суму густини струму провідності і густини стороннього струму ($\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ст}}$). Аналогічно можна замінити \mathbf{E} сумою $(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}})$, якщо зручніше подавати джерело енергії як джерело напруги. Таким чином, фізичний зміст останнього доданку розширюється: він характеризує усі види перетворення енергії – не тільки перетворення електромагнітної енергії в теплову, але й перетворення інших видів енергії в електромагнітну.

1.5. Граничні умови.

При розрахунках електричних та магнітних полів зустрічаються ситуації, коли силові лінії проходять через межу розділу двох або більше середовищ. Безпосередній розв'язок диференціальних рівнянь Максвелла в цьому випадку неможливий і, як правило, розв'язують рівняння для кожного середовища

окремо, а одержані розв'язки “зшивають” на границі розділу. Для цього використовують так звані граничні умови, які являють собою співвідношення між значеннями векторів поля по обидва боки від границі розділу.

Необхідно зауважити, що граничні умови не є чимось додатковим до рівнянь Максвелла. Вони виводяться з цих рівнянь на границі, яка вважається різкою, де функції розподілу полів не є неперервними, і тому в цій точці значення просторових похідних є невизначеними. Звичайно граничні умови записують у вигляді чотирьох співвідношень – по два для електричних і магнітних полів: для нормальних і дотичних складових.

Розглянемо спочатку виведення цієї умови для дотичних складових електричного поля з третього рівняння Максвелла

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV.$$

Як об'єм інтегрування візьмемо циліндр (рис. 1.9), з висотою Δh і площею основ ΔS , що лежать по обидві сторони від границі розділу середовищ. Розміри Δh і ΔS повинні бути настільки малими, щоб у межах цього об'єму поля можна було вважати незмінними. Інтеграл у лівій частині представимо як суму трьох інтегралів: по верхній і нижній торцевих поверхнях і по бічній поверхні циліндра. З огляду на взаємне розташування векторів $d\mathbf{S}$ і орта нормалі \mathbf{e}_n до границі розділу, можна записати

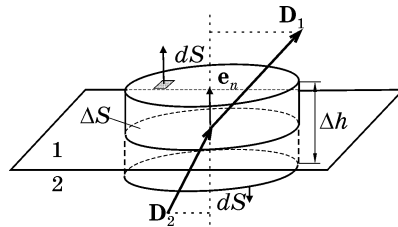


Рис.1.9. Вибір об'єму інтегрування при встановленні граничних умов для нормальних складових

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\Delta S + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \Delta q, \quad (1.13a)$$

або

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D} d\mathbf{S} / \Delta S = \Delta q / \Delta S. \quad (1.13б)$$

Тут Δq – весь заряд, зосереджений усередині обраного об'єму. Якщо потім зменшувати висоту циліндра ($\Delta h \rightarrow 0$), наближаючи його верхній і нижній торець до границі розділу, то очевидно, що потік вектора \mathbf{D} через бічну поверхню також буде прямувати до 0, як і заряд у правій частині, якщо густина заряду в розглянутому об'ємі має скінченні значення. У цьому випадку

$$D_{1n} - D_{2n} = 0. \quad (1.14)$$

де D_{1n} і D_{2n} – проекції векторів \mathbf{D}_1 і \mathbf{D}_2 на нормаль до границі розділу.

Однак, зустрічаються ситуації, коли заряд зосереджений у дуже тонкому (макроскопічно – у нескінченно тонкому) шарі біля границі розділу і можна ввести поняття поверхневого заряду з *поверхневою густиною*

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta q / \Delta S, \quad (\text{Кл/м}^2). \quad (1.15)$$

Тоді при стягуванні торців циліндра до границі розділу ($\Delta h \rightarrow 0$) права частина (1.13а) буде прямувати до фіксованої величини, рівної $\rho_s \Delta S$, а рівність (1.13б) прийме вигляд

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (1.16)$$

або в скалярній формі

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s. \quad (1.17)$$

Останні співвідношення і являють собою одне з граничних умов для електричного поля й означають, що на границі розділу нормальна складова вектора електричної індукції має розрив, що дорівнює поверхневій густині заряду. Якщо ж на границі немає заряду, то нормальна складова неперервна і $D_{1n} = D_{2n}$, або для векторів напруженості поля $\varepsilon_1 \mathbf{E}_{1n} = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{2n}$.

Слід зазначити, що уявлення про нескінченно тонкий шар поверхневого заряду є ідеалізацією, прийнятною лише з макроскопічної точки зору. Надалі будуть розглянуті більш точні моделі, що дають уявлення про реальні розподіли заряду в приповерхневих шарах (див. *приклад 2.7*).

Звернувшись до четвертого рівняння Максвелла в інтегральній формі $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$, що за структурою відрізняється від

третього тільки нульовою правою частиною, можна подібним чином одержати, що на границі розділу двох середовищ

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (1.18)$$

тобто проекції векторів магнітної індукції на нормаль до границі неперервні $B_{1n} = B_{2n}$, а проекції векторів напруженості магнітного поля можуть відрізнитися через різні магнітні проникності середовищ: $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$.

Для одержання співвідношень між дотичними складовими векторів поля на границі розділу двох середовищ (горизонтальна площина на рис. 1.10) проведемо довільну площину S через орт нормалі \mathbf{e}_n до неї. Вона буде перпендикулярною до площини розділу, а напрямок орта \mathbf{e}_τ уздовж лінії перетину ніяк не пов'язаний з орієнтацією векторів поля. У цій площині виберемо контур інтегрування у вигляді прямокутника, що лежить по обидві сторони від границі розділу, зі сторонами Δl і Δh настільки малими, щоб у межах площадки $\Delta S = \Delta l \Delta h$ поля можна вважати незмінними.

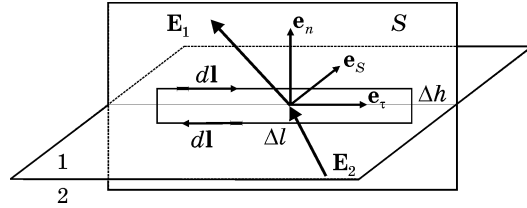


Рис.1.10. Вибір контуру інтегрування при встановленні граничних умов для дотичних складових

Проводячи інтегрування другого рівняння Максвелла в інтегральній формі $\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -d(\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S})/dt$ по цьому контуру,

представимо циркуляцію вектора \mathbf{E} у лівій частині як суму інтегралів по верхній, нижній і бічній сторонах прямокутника. З огляду на сталість векторів поля уздовж контуру, а також взаємну орієнтацію орта \mathbf{e}_τ і векторів $d\mathbf{l}$, можна записати

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\Delta l + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\mathbf{e}_s(d\mathbf{B}/dt)\Delta h\Delta l, \quad (1.19a)$$

або

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{E} d\mathbf{l} / \Delta l = -\mathbf{e}_s(d\mathbf{B}/dt)\Delta h, \quad (1.19b)$$

Стягуючи верхню і нижню сторони контуру до границі розділу ($\Delta h \rightarrow 0$), одержимо, що і третій доданок і права частина в останній рівності стають знехтувально малими, і воно приймає вигляд

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0. \quad (1.20)$$

Оскільки напрямок орта \mathbf{e}_τ на границі розділу було обрано довільно, то проекція різницевого вектора напруженості електричного поля на *будь-який* напрямок дорівнює 0. Зокрема, це значить, що проекції векторів \mathbf{E}_1 і \mathbf{E}_2 на площину розділу середовищ однакові:

$$\mathbf{E}_{1\tau} = \mathbf{E}_{2\tau}, \quad (1.21)$$

а різницевий вектор може мати тільки нормальну складову, котра відповідно до (1.17) може бути тільки при наявності поверхневого заряду. Тому

$$[(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{e}_n] = 0. \quad (1.22)$$

Останні три співвідношення можуть вважатися рівноцінними і являють собою граничну умову для дотичної складової вектора напруженості електричного поля.

Граничну умову для дотичних складових магнітного поля можна одержати за такою ж методикою, як і попередню, але скориставшись першим рівнянням Максвелла в інтегральній формі $\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = d(\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S})/dt + \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}$. Інтегруючи його по контуру, такому ж, як і на рис. 1.10, одержимо співвідношення

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\Delta l + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \mathbf{e}_s(d\mathbf{D}/dt)\Delta h\Delta l + \mathbf{e}_s \mathbf{j} \Delta h\Delta l, \quad (1.23a)$$

або

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{H} d\mathbf{l} / \Delta l = \mathbf{e}_s(d\mathbf{D}/dt)\Delta h + \mathbf{e}_s \mathbf{j} \Delta h, \quad (1.23b)$$

які відрізняється від (1.19) заміною \mathbf{E} на \mathbf{H} , \mathbf{B} на $-\mathbf{D}$ і тим, що у правій частині є другий доданок, який представляє струм провідності Δi , що протікає через площадку $\Delta S = \Delta h\Delta l$.

При стягуванні контуру до лінії Δl на границі розділу обидва доданки правої частини через скінченні значення векторів \mathbf{D} і \mathbf{j} стають знехтувально малими і

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0, \quad (1.24)$$

тобто дотичні складові вектора напруженості магнітного поля по обидві сторони від границі розділу однакові.

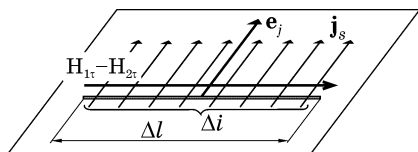
Однак, виняток складає ідеалізована ситуація, коли весь струм провідності протікає у нескінченно тонкому шарі біля границі розділу. Для такого *поверхневого струму* зручно ввести поняття *лінійної густини*

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{e}_j \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \Delta i / \Delta l, \quad (\text{А/м}), \quad (1.25)$$

де орт \mathbf{e}_j збігається з напрямком ліній струму, а Δi – величина струму, що проходить по поверхні і перетинає відрізок Δl , перпендикулярний лініям струму (рис. 1.11).

У цьому випадку при стягуванні контуру інтегрування до границі розділу другий доданок у правій частині (1.23a)

залишається незмінним, бо весь струм через площадку ΔS дорівнюватиме



$$\Delta i = \int_{\Delta S} \mathbf{j} d\mathbf{S} = \mathbf{e}_s \mathbf{j}_s \Delta l \quad (1.26)$$

і не залежним від розміру Δh , а вираз (1.23б) приймає вигляд

$$\mathbf{e}_\tau (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{e}_s \mathbf{j}_s. \quad (1.27)$$

Рис.1.11. Поверхневий струм викликає розрив напруженості магнітного поля

Якщо площину S на рис. 1.10 вибрати перпендикулярною до ліній струму, так щоб орт \mathbf{e}_s збігався з \mathbf{e}_j , то (1.27) прийме більш просту форму запису

$$\mathbf{e}_\tau (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s. \quad (1.28a)$$

або

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_s. \quad (1.28б)$$

Ці співвідношення означають, що при протіканні по границі розділу поверхневого струму дотичні складові векторів напруженості магнітного поля відрізняються на величину, рівну лінійній густині струму. За напрямком ця різниця перпендикулярна лініям струму (рис. 1.11).

У підсумку співвідношення (1.17), (1.21) для електричного поля і (1.18), (1.28) для магнітного являють собою граничні умови, записані для нормальних і дотичних складових. Їх можна представити й у векторній формі. Якщо вважати, що поле в першому середовищі відомо, то вектор напруженості електричного поля у другому середовищі

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_\tau E_{1\tau} + \mathbf{e}_n (\epsilon_1 E_{1n} / \epsilon_2 - \rho_s / \epsilon_2 \epsilon_0). \quad (1.29)$$

Це співвідношення показує, що дотична складова напруженості залишається такою ж, як і в першому середовищі. Нормальна складова змінюється, по-перше, за рахунок зміни діелектричної проникності речовини і, по-друге, за рахунок поля поверхневого заряду, якщо такий має місце на границі розділу. Він змінює нормальну складову вектора електричної індукції відповідно до (1.17) на величину ρ_s . Треба відзначити, що в (1.20) напрямок орта \mathbf{e}_τ на границі у принципі може бути будь-яким, але в (1.29) він повинний розташовуватися уздовж проекції \mathbf{E}_1 на границю розділу.

Для магнітного поля співвідношення (1.18) і (1.27) між векторами \mathbf{H}_1 і \mathbf{H}_2 на границі розділу можна представити у векторній формі

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_\tau H_{1\tau} + \mathbf{e}_n \mu_1 H_{1n} / \mu_2 + [\mathbf{e}_n \times \mathbf{j}_s]. \quad (1.30)$$

Звідси видно, що нормальна складова напруженості магнітного поля змінюється відповідно до зміни магнітної проникності середовищ. Дотична складова залишається незмінною, якщо на границі немає поверхневих струмів. У протилежному випадку вектори \mathbf{H}_1 і \mathbf{H}_2 відрізняються на величину, що відповідає напруженості магнітного поля, створюваного поверхневими струмами. Величина цього розриву дорівнює лінійній густині струму, а напрямком визначається ортом векторного добутку $[\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_n]$.

Використовуючи наведені граничні умови, розглянемо дві прості моделі, що описують поля біля поверхні ідеального провідника і мають велике значення для розуміння подальшого матеріалу.

Приклад 1.8. Які особливості електричного поля біля поверхні ідеального металу? Для відповіді на це питання треба виходити з того, що якщо електрична провідність металу дорівнює нескінченності, то усередині нього електричне поле повинне бути відсутнім. Але тоді з граничних умов (1.17) та (1.21) відразу витікає, що дотична складова поля над поверхнею дорівнює нулю і вектор напруженості електричного поля буде перпендикулярним до поверхні (рис. 1.12) і пропорційний поверхневій густині заряду $E_1 = E_n = \rho / \epsilon \epsilon_0$. Цей висновок спрощено розповсюджується і на звичайні метали.

Приклад 1.9. Які особливості високочастотного магнітного поля біля поверхні ідеального металу? Як і в попередньому прикладі, основою для відповіді є той факт, що високочастотне поле в середину металу не проникає, тобто його магнітна складова дорівнює нулю навіть в немагнітних металах. Це означає, що нормальна складова вектора також дорівнює нулю, тому магнітне поле буде дотичним до поверхні і перпендикулярним до ліній струму, а його напруженість дорівнюватиме поверхневій густині струму (рис. 1.13):

$$H_1 = H_\tau = j_s.$$

Розглянемо ще один приклад, який показує, як використовуються граничні умови біля границі розділу двох середовищ.

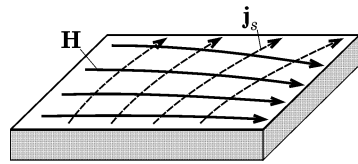
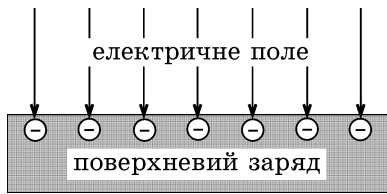


Рис.1.12. Електричне поле на поверхні ідеального металу, створюється поверхневим зарядом і перпендикулярне до неї

Рис.1.13. Струм на поверхні ідеального металу створює дотичне до неї магнітне поле

Приклад 1.10. Нехай треба розрахувати напрямок та величину електричного поля у слюді ($\epsilon = 7$, $\sigma = 10^{-17}$ См/м), якщо біля її поверхні у повітрі напруженість поля дорівнює 10^3 В/м, а силові лінії направлені під кутом 45° до поверхні.

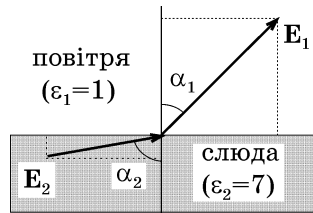


Рис.1.14. Зміна напрямку і довжини вектора електричного поля на межі діелектричних середовищ

Значення питомої електричної провідності показує, що слюда – хороший діелектрик, тому зовнішнє поле не викликає на її поверхні наведеного заряду ($\rho_s = 0$). Використовуючи позначення на рис. 1.14, запишемо граничні умови для нормальної ($\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$) і дотичної ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$) складових електричного поля по обидва боки від границі. Оскільки $E_{1n} = E_1 \cos \alpha_1 \approx 707$ В/м, то $E_{2n} = E_{1n} / \epsilon_2 \approx 101$ В/м, а $E_{2\tau} = E_{1\tau} = E_1 \sin \alpha_1 \approx 707$ В/м. Звідси одержимо

$E_2 = \sqrt{E_{2n}^2 + E_{2\tau}^2} = 714$ В/м; $\alpha_2 = \arctg(E_{2\tau} / E_{2n}) = 82^\circ$. Зауважимо, що із збільшенням діелектричної проникності кут нахилу вектора напруженості поля зростає.

Цей факт використовують для формулювання *наближених* граничних умов при моделюванні електричних полів у напівпровідникових приладах. Найбільш вживані напівпровідникові матеріали мають діелектричну проникність, що значно перевищує 1 ($\epsilon_{Ge} = 16$, $\epsilon_{Si} = 12$, $\epsilon_{GaAs} = 13$). Через те, що нормальна складова напруженості у напівпровіднику обернено пропорційна його діелектричній проникності ($E_{2n} = E_{1n} / \epsilon_2$), а дотична не змінюється ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$), наближено можна вважати $E_{2n} \approx 0$. Тобто при розрахунках розподілу електричного поля всередині напівпровідникових приладів приймають, що на їх вільних границях нормальна складова напруженості поля відсутня.