

## 2. СТАТИЧНІ, СТАЦІОНАРНІ ТА КВАЗИСТАЦІОНАРНІ ПОЛЯ

У цьому розділі розглядатимемо поля, для яких можна знехтувати зміною їх у часі (статичні та стаціонарні), або ці зміни дуже повільні (квазістаціонарні). Головна особливість таких полів випливає з рівнянь Максвелла, якщо в них прийняти  $\partial/\partial t = 0$ . У цьому випадку повна система рівнянь поділяється на дві окремі системи

для електричних полів:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \end{aligned}$$

для магнітних полів:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Такий поділ означає, що статичні електричні та магнітні поля не залежать одне від одного і їх можна розглядати окремо.

### 2.1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

#### 2.1.1. Основні рівняння електростатики

Електростатика – це розділ теорії електромагнітного поля, який вивчає електричні поля, утворені нерухомими зарядами. Зрозуміло, що таку ситуацію треба розглядати лише як ідеалізовану, коли відсутнє перенесення заряду, тобто струми провідності, а це, в свою чергу, можливо тільки для ідеальних діелектричних середовищ ( $\sigma = 0$ ). У реальних ситуаціях статичними вважають такі поля, напруженість яких не змінюється суттєво протягом часу спостереження, тому рівняння електростатики безпосередньо виходять з другого й третього рівнянь Максвелла, якщо в них прийняти  $\partial/\partial t = 0$ :

диференціальна форма

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

інтегральна форма

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$$

$$\oint_s \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_{V_r} \rho dV_r$$

(2.2)

Перше з цих рівнянь означає, що електростатичне поле є "безвихровим", або потенціальним, тому що для нього, використовуючи тотожність  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) \equiv 0$  (див. Додаток 1) можна ввести деяку скалярну величину  $V(\mathbf{r})$ , яка називається *електростатичним потенціалом*, і таку, що

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Для з'ясування фізичного змісту потенціалу розглянемо роботу з переміщення заряду  $q$  в електростатичному полі між точками 1 і 2:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = q \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{r}$$

Підінтегральний вираз з урахуванням (2.3) є повним диференціалом  $-dV$ , оскільки

$$\mathbf{E} d\mathbf{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = -dV(x, y, z).$$

Тому

$$A = -q \int_1^2 dV = q(V_1 - V_2). \quad (2.4)$$

Звідси видно, що чітко визначений *фізичний зміст має різниця потенціалів*, яка дорівнює роботі по переміщенню одиничного додатнього заряду ( $q = +1$ ) між точками 1 і 2. Причому *значення потенціалу може бути визначене з точністю до деякого постійного доданку*, тому що заміна  $V$  на  $V + \text{const}$  нічого не змінює. Якщо вибрати початок відліку потенціалу, наприклад, в точці 2 ( $V_2 = 0$ ), то поняття потенціалу набуває визначеності:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (2.4a)$$

Потенціал даної точки  $\mathbf{r}$  є роботою з переміщення одиничного додатнього заряду з цієї точки у точку, де потенціал дорівнює нулю. В фізиці за звичаєм нульовим приймають потенціал нескінченно віддаленої точки. В техніці таким вважають або потенціал земної поверхні, або потенціал корпусу приладу, або потенціал спільної точки різних джерел живлення в електронних колах.

Треба відзначити, що результат інтегрування в (2.4) не залежить від траєкторії переміщення заряду між точками 1 і 2, а тільки від значень потенціалів у них. Звідси випливає, що *робота зовнішніх сил з переміщення заряду по замкнутій траєкторії дорівнює 0*.

Важливою властивістю електростатичного поля є те, що при вільному русі зарядженої частки її *повна енергія залишається незмінною*. Щоб це довести, помножимо скалярно обидві частини рівняння руху частки  $d(m\mathbf{v})/dt = q\mathbf{E}$  на вектор швидкості  $\mathbf{v}$  і врахуємо, що  $\mathbf{v}d(m\mathbf{v}) = d(mv^2/2) = dE_k$ , а  $q\mathbf{E}\mathbf{v} = q\mathbf{E}d\mathbf{r}/dt = -qdV/dt = -dU/dt$ , де  $E_k$  – кінетична, а  $U = qV$  – потенціальна енергія заряду  $q$ . Отже,

$$d(E_k + U)/dt = 0, \quad (2.5)$$

і зміна кінетичної енергії можлива тільки за рахунок відповідної зміни потенціальної.

Потенціал – скалярна функція координат, і його визначення є більш легким завданням, ніж визначення напруженості поля, яка є векторною величиною і вимагає знання трьох скалярних (її проєкцій) функцій. Тому для розрахунку електростатичного потенціалу використовують звичайно друге рівняння (2.1), яке з урахуванням (1.1) та (2.2) при використанні символічного оператора  $\nabla$  (див. Додаток 1) приймає вигляд

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon\epsilon_0. \quad (2.6)$$

Це рівняння називається *рівнянням Пуассона*. Воно дозволяє знайти розподіл потенціалу в деякій області простору, якщо в ній заданий розподіл об'ємної густини заряду. Якщо в просторовій області, що розглядається, об'ємний заряд відсутній, розподіл потенціалу підпорядковується так званому *рівнянню Лапласа*:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (2.7)$$

Іноді буває зручним використовувати рівняння Пуассона для вектора індукції електричного поля у формі

$$\nabla^2 \mathbf{D} = \text{grad } \rho. \quad (2.8)$$

яку можна отримати, якщо подіяти оператором  $\text{grad}$  на рівняння (1.2,а), прийнявши до уваги тотожність  $\text{grad div } \mathbf{D} \equiv \nabla^2 \mathbf{D}$  (див. додаток 1), дійсну для електростатичних полів, коли  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ .

### 2.1.2. Типи задач електростатики

Безпосередній розрахунок просторового розподілу напруженості електричного поля можна проводити за допомогою третього рівняння Максвелла або в інтегральній формі (теорема Гауса), або в диференціальній по (1.2) або по (2.8). Теорему Гауса зручно використовувати лише при деяких відносно простих розподілах поля, що мають ту чи іншу симетрію (прикладі 1.3, 2.1).

Істотно спрощує розрахунок поля використання поняття потенціалу, тому що знаходження просторового розподілу векторної функції  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  зводиться до знаходження тільки однієї скалярної функції  $V(\mathbf{r})$  і потім при необхідності до визначення її градієнта відповідно до (2.3).

Формально можна виділити два типи задач, що зустрічаються при розрахунках електростатичних полів. Перший полягає у знаходженні такого розподілу зарядів у просторі  $\rho(\mathbf{r})$ , який забезпечує необхідний розподіл потенціалу  $V(\mathbf{r})$ . Це можна просто зробити відповідно до рівняння Пуассона (2.2) повторним диференціюванням функції  $V(\mathbf{r})$  по координатах.

Більш складним є другий тип задач, коли за заданим розподілом зарядів у просторі необхідно знайти розподіл поля. У цьому випадку результат можна одержати інтегруванням рівняння Пуассона. У принципі це рішення може бути отримане в загальному вигляді. Для цього скористаємося *принципом суперпозиції*, узявши за основу розподіл потенціалу навколо точкового заряду у вигляді  $V(\mathbf{r}) = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 r$ . Якщо початок координат не збігається з місцем розташування заряду, то  $V(\mathbf{r}) = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ , де  $\mathbf{r}_0$  – координата місця розташування заряду, а  $\mathbf{r}$  – поточна координата довільної точки, у якій розраховується поле. Очевидно, що при наявності в просторі великої кількості зарядів  $q_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) потенціал можна знайти підсумовуванням

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0i}|}.$$

Звідси легко перейти до безперервного розподілу заряду  $\rho(\mathbf{r})$  в об'ємі  $V_r$ , якщо замінити  $q_i$  на  $\rho(\mathbf{r}')dV_r'$ , а підсумовування на інтегрування по координатах розташування зарядів (штриховані змінні):

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{V_r'} \frac{\rho(\mathbf{r}')dV_r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.9)$$

Даний вираз є розв'язком рівняння Пуассона в загальному вигляді. Однак процедура інтегрування в (2.9) може виявитися складнішою, ніж розв'язок рівняння Пуассона. Тим більше, що задавати просторове розташування зарядів буває дуже складно. Наприклад, у тих випадках, коли поля створюються металевими електродами з відомими потенціалами на них, розподіл зарядів по їхній поверхні до розрахунку поля звичайно ще невідомий.

Звичайно в практичних конструкціях поля створюються як системою електродів, так і зарядами в міжелектродному просторі. Якщо власними полями зарядів можна знехтувати, то розрахунок зводиться до інтегрування рівняння Лапласа з граничними умовами у вигляді відомих потенціалів на електродах (т.зв. крайова задача). Для таких задач існує єдина функція, що задовольняє рівнянню Лапласа і граничним умовам. Якщо ж між електродами існує просторовий заряд з відомим розподілом  $\rho(\mathbf{r})$ , то необхідно вирішувати рівняння Пуассона з заданою правою частиною.

Однак для електроніки найбільш характерні так називані *самоузгоджені задачі*. Вони виникають, коли в міжелектродному просторі існують заряди, що рухаються (рухливі носії заряду), і їхні власні поля порівнянні з полями, створюваними зовнішніми джерелами. При цьому не можна заздалегідь знати  $\rho(\mathbf{r})$  у рівнянні Пуассона, густина заряду залежить від розподілу результуючого поля, що у свою чергу залежить від просторового розподілу зарядів. У цьому випадку необхідно узгоджено, тобто як систему, розв'язувати рівняння Пуассона й у тій або іншій формі рівняння руху зарядів, яке описує сталий розподіл заряду. Підсумком зв'язку самоузгоджених задач є відомі розподіли потенціалу і густини заряду в просторі.

### 2.1.3. Приклади розв'язку задач електростатики

Математично розв'язання електростатичної задачі при відомих потенціалах на провідниках зводиться до знаходження функції, що задовольняє рівнянню Пуассона й приймає на границі області задане значення. Ця задача називається задачею Діріхле.

У більшості випадків розв'язання електростатичних задач зустрічає значні труднощі, і знайти аналітичний розв'язок рівнянь Пуассона або Лапласа вдається лише в окремих випадках з порівняно простою геометричною конфігурацією провідників. Не існує єдиного методу розв'язання електростатичних задач, і для різних типів застосовуються спеціальні засоби й методи розв'язання.

Розглянемо декілька прикладів розв'язання рівнянь електростатики. Детальний розв'язок цих задач наведено не тільки для ознайомлення з найпростішими моделями розподілу полів, до

яких зводиться багато реальних ситуацій, а й з метою ознайомлення з *основними етапами розрахунку* електростатичних полів:

- вибором фізичної моделі, що включає допустиму ідеалізацію конфігурації електродів і зручне розташування відповідної системи координат;
- формуванням граничних умов на основі умови задачі;
- записом і розв'язанням основного рівняння (рівняння Лапласа або для середовища з об'ємним зарядом – рівняння Пуассона), а для задач з рухливими носіями зарядів – відповідною самоузгодженою системою рівнянь;
- знаходженням сталих інтегрування з граничних умов, аналізом одержаних результатів та, при необхідності, більш точного розв'язку задачі, зняттям деяких припущень з наступним повторним рішенням.

*Приклад 2.1. Поле зарядженого провідника.* Нехай необхідно розрахувати розподіл електричного поля, що виникає навколо зарядженого провідника, якщо задано його заряд. При виборі ідеальної моделі нескінченно довгого і тонкого провoda з заданим зарядом  $\rho_l$  на одиницю довжини зручно скористатися теоремою Гауса, як у прикладі 1.3. Вибираючи як поверхню інтегрування співвісний із провідом циліндр із радіусом  $r$  і довільною довжиною  $\Delta l$  (рис. 2.1), можемо скористатися осьовою симетрією задачі. Силові лінії електричного поля, радіально розходячись від поверхні провoda, будуть колінеарні з вектором  $d\mathbf{S}$  на бічній поверхні циліндра і перпендикулярні на його торцевих поверхнях. Тому потік вектора  $\mathbf{D}$  через поверхню циліндра складатиметься тільки з потоку через бічну поверхню і дорівнюватиме  $2\pi r\Delta l D$ . З іншого боку, заряд усередині циліндра зосереджений на провіднику і дорівнює  $\rho_l\Delta l$ . З їхньої рівності одержуємо з урахуванням напрямку для вектора напруженості електричного поля

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{e}_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|r|^2}. \quad (2.10)$$

У декартових координатах ( $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x x/r + \mathbf{e}_y y/r$ ):

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left( \mathbf{e}_x \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathbf{e}_y \frac{y}{x^2 + y^2} \right). \quad (2.11)$$

Просторовий розподіл потенціалу знаходиться інтегруванням (2.11)

$$V(r) = -\int \mathbf{E} dr = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C. \quad (2.12)$$

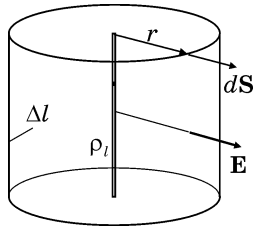


Рис. 2.1. Вибір об'єму і поверхні інтегрування для розрахунку поля зарядженої нитки визначається осью симетрії задачі.

У декартових координатах ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ):

$$V(x, y) = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C. \quad (2.13)$$

Тут константа інтегрування може бути знайдена, якщо задати потенціал у деякій точці. Але треба зазначити, що в даній моделі відокремленого нескінченно тонкого проводу не існує точки простору, де зручно було б вибрати потенціал рівним 0.

**Приклад 2.2. Поле двох заряджених провідників.** Для розрахунку розподілу потенціалу в просторі біля двох паралельних різноіменно заряджених (із заданим зарядом  $+\rho_l$  і  $-\rho_l$  на одиницю довжини) провідників нескінченної довжини зручно скористатися *методом суперпозиції*. Для цього виберемо розташування декартової системи координат, як позначено на рис. 2.2, а, і запишемо вирази (2.13) для кожного провідника, змістивши їх на відстань  $\pm d$  відповідно:

$$\begin{aligned} V_+(x, y) &= -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + (y - d)^2} + C_+, \\ V_-(x, y) &= +\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + (y + d)^2} + C_-. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тут індекси  $\pm$  відповідають знакові заряду провідника. Результуюче поле знаходиться підсумовуванням цих виразів, причому загальну константу  $C_+ + C_-$  зручно вибрати рівною 0, якщо прийняти нульовим потенціал у точці  $y = 0$ :

$$V(x, y) = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y + d)^2}{x^2 + (y - d)^2}. \quad (2.15)$$

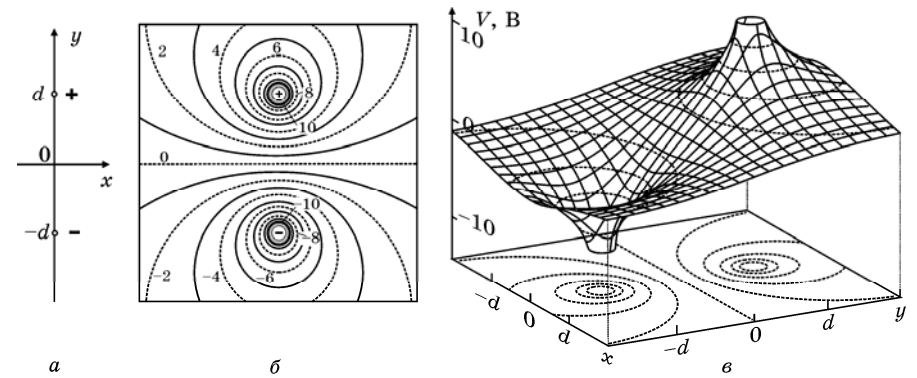


Рис. 2.2. Поле двох різноіменно заряджених провідників (а) зручно представляти у вигляді екіпотенціальних ліній (б), що являють собою лінії рівної «висоти» на потенціальній функції  $V(x, y)$  (в). Розподіл напруженості електричного поля зручно зображувати у вигляді силових ліній або векторного поля (рис. 1.1).

Цей вираз дозволяє знайти потенціал будь-якої точки простору через заряд провідників. Розподіл потенціалу зручно зображувати за допомогою ліній рівного потенціалу або *екіпотенціалей* (рис. 2.2, б), які є лініями постійного рівня на «тривимірній» функції  $V(x, y)$ , зображеній на рис. 2.2, в. Рівняння  $i$ -ї екіпотенціалі просто отримати з останнього виразу, якщо в ньому прийняти замість  $V(x, y)$  фіксований потенціал  $V_i$ :

$$V_i = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y + d)^2}{x^2 + (y - d)^2}. \quad (2.16)$$

Позначивши для стислості запису  $2\pi\epsilon_0 V_i \rho_l \equiv \alpha$ , це рівняння можна представити у вигляді

$$x^2 + (y - d/\text{th}\alpha)^2 = (d/\text{sh}\alpha)^2. \quad (2.17)$$

Звідси видно, що екіпотенціальні лінії являють собою кола з радіусом  $d/\text{sh}\alpha$ , зміщені назовні від точок  $\pm d$  на відстань  $d/\text{th}\alpha$  (рис. 2.2, б).

Отримані результати придатні, строго кажучи, тільки для нескінченно тонких провідників. Для провідників скінченного

перетину можна скористатися наступним прийомом. Якщо задано радіус проводів  $a$  і потенціали на них  $\pm V_0$ , то можна сумістити поверхні проводів з екіпотенціалами  $V_i = \pm V_0$ , радіус яких дорівнює  $d/\text{sh}\alpha_0 = a$ . Звідси можна встановити зв'язок між потенціалом проводу і зарядом на ньому. Обмежуючись для спрощення випадком тонких проводів ( $d \gg a$ ), коли  $\alpha_0 \gg 1$ ,  $\text{th}\alpha_0 \approx 1$  і  $\text{sh}\alpha_0 \approx \exp(\alpha_0/2) = d/a$ , одержимо

$$\rho_l = 2\pi\epsilon_0 V_0 / \ln(2d/a), \quad (2.18)$$

а розподіл потенціалу (2.15) запишемо у вигляді:

$$V(x, y) = \frac{V_0}{2 \ln(2d/a)} \ln \frac{x^2 + (y+d)^2}{x^2 + (y-d)^2}. \quad (2.19)$$

З (2.18) виходить ще один важливий результат: коефіцієнт пропорційності між зарядом на проводах  $\rho_l$  і напругою  $2V_0$  між ними є ємністю проводів одиничної довжини або *погонною* ємністю:

$$C_0 = \pi\epsilon_0 / \ln(2d/a), \quad (2.20)$$

Для більш товстих провідників отримані результати можна уточнити, якщо відстань між проводами збільшити у відповідності до зміщення екіпотенціалів  $\pm V_0$ .

**Приклад 2.3. Поле у плоскому конденсаторі.** Нехай треба розрахувати розподіл електростатичного поля й потенціалу між пластинами плоского конденсатора. Розглянемо (рис. 2.3) ідеалізовану модель плоского конденсатора у вигляді паралельних нескінченних пластин, що дає можливість не враховувати крайові ефекти і вважати задачу одновимірною. Розмістимо вісь  $x$  перпендикулярно до пластин, вибравши початок координат на пластині з меншим потенціалом, який приймемо рівним нулю:  $V(0) = 0$ . Тоді друга пластина, розташована на відстані  $d$ , буде мати потенціал  $V(d) = V_0$ , який дорівнює прикладеній між пластинами різниці потенціалів. Оскільки просторовий заряд між пластинами відсутній, задача зводиться до одновимірного рівняння Лапласа:  $d^2V/dx^2 = 0$ , розв'язок якого має вигляд  $dV/dx = C_1$  та  $V(x) = C_1x + C_2$ . Використання зформульованих граничних умов дозволяє знайти сталі інтегрування:  $C_2 = 0$  та  $C_1 = V_0/d$ . Отже, потенціал лінійно зростає від однієї пластини до другої:  $V(x) = V_0x/d$ , а коефіцієнт пропорційності чисельно дорівнює напруженості електричного поля  $E = V_0/d$ . У векторній формі  $\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x V_0/d$ .

В розглянутій задачі напруженість поля не залежить від координат, і таке поле називається *однорідним*.

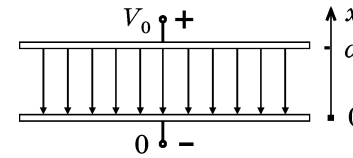


Рис. 2.3. Поле між пластинами плоского конденсатора (без враховування крайових ефектів) однорідне, тобто не залежить від просторових координат.

**Приклад 2.4. Поле у циліндричному конденсаторі.** Розглянемо аналогічну задачу для циліндричного конденсатора (рис. 2.4), який також умовно будемо вважати нескінченно довгим, щоб не враховувати крайових ефектів. На відміну від приклада 2.1 розглянемо рішення цієї задачі не з допомогою теореми Гауса, а інтегруючи рівняння Лапласа. При даній конфігурації електродів зручно скористатися циліндричною системою координат з віссю  $z$ , що співпадає з віссю циліндра. Так як очевидно, що  $\partial/\partial z = \partial/\partial \phi = 0$ , рівняння Лапласа (вираз для оператора у циліндричних координатах див. у додатку 1) прийме вигляд

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

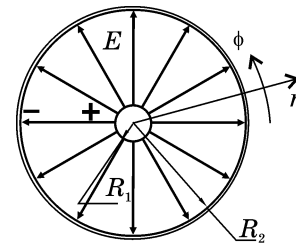


Рис. 2.4. Поле циліндричного (коаксіального) конденсатора однорідне по довжині і полярному куті й спадає в радіальному напрямку.

Оскільки  $r$  величина змінна, то нулю дорівнює похідна, а вираз у дужках сталий, тому  $dV/dr = C_1/r$  і  $V(r) = C_1 \ln(r) + C_2$ . Приймемо потенціал зовнішнього циліндра  $V(R_2) = 0$ , тоді потенціал внутрішнього  $V(R_1)$  буде дорівнювати прикладеній різниці потенціалів  $V_0$ . Використовуючи ці умови як граничні для знаходження сталих інтегрування, одержуємо  $C_1 = V_0/\ln(R_2/R_1)$ ,  $C_2 = -C_1 \ln R_1$ . Отже, потенціал у циліндричному конденсаторі змінюється за логарифмічним законом:

$$V(r) = V_0 \frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}, \quad (2.21)$$

а напруженість поля спадає обернено пропорційно відстані від центру

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_r \frac{dV}{dr} = \mathbf{e}_r \frac{V_0}{\ln(R_2/R_1)} \cdot \frac{1}{r}. \quad (2.22)$$

Тут корисно зазначити, що отримані розподіли поля співпадають з результатами прикладу 2.1 для зарядженої нитки, однак тут константи інтегрування отримали визначеність через зручність задання граничних умов.

Для розрахунку ємності між електродами коаксіального конденсатора необхідно встановити зв'язок між зарядом, наприклад, на внутрішньому провіднику та його потенціалом. З цією метою скористаємося третім рівнянням Максвелла в інтегральній формі (1.15). Як поверхню інтегрування виберемо циліндричну поверхню  $S$ , співпадаючу з поверхнею внутрішнього електрода довжиною  $\Delta l$ . Оскільки на ній вектори  $\mathbf{E}$  та  $d\mathbf{S}$  колінеарні і значення вектора  $\mathbf{D}(R_1) = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}(R_1)$  однакове у всіх точках, то інтегрування зводиться до перемноження  $D(R_1) = \varepsilon\varepsilon_0 V_0 / R_1 \ln(R_2/R_1)$  та площі циліндричної поверхні  $S = 2\pi R_1 \Delta l$ . Цей добуток за теоремою Гауса дорівнює заряду  $\Delta q = \rho_l \Delta l$  на відрізку внутрішнього електрода довжиною  $\Delta l$ . Із цієї рівності легко визначається коефіцієнт пропорційності між зарядом на одиниці довжини  $\rho_l = \Delta q / \Delta l$  внутрішнього електрода та потенціалом  $V_0$  на ньому:

$$C_0 = \frac{\rho_l}{V_0} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}, \quad (2.23)$$

який і є погонною ємністю між коаксіальними провідниками циліндричної конструкції.

**Приклад 2.5. Поле заряду над провідною поверхнею.** Для розрахунку поля точкового заряду  $q$ , що знаходиться над металевою поверхнею на відстані  $a$  (рис. 2.5, а), можна використовувати метод *дзеркальних відображень*. Електричне поле виникає між зарядом  $+q$  і від'ємним зарядом, індукованим на провідній площині. Розподіл цього заряду по поверхні заздалегідь не відомий, що й утрудняє безпосередній розрахунок. Але відповідно до методу дзеркальних відображень це поле буде таким самим, як і поле між двома зарядами: заданим зарядом і точковим від'ємним зарядом  $-q$ , що знаходиться на такій же відстані  $a$  (рис. 2.5, б), але дзеркально щодо поверхні. Ця подібність ґрунтується на тім, що через симетрію задачі поверхня металу буде співпадати

з еквіпотенціальною поверхнею, а силові лінії будуть перпендикулярні до площини симетрії, точно так само, як і силові лінії на поверхні провідника відповідно до граничних умов (приклад 1.8).

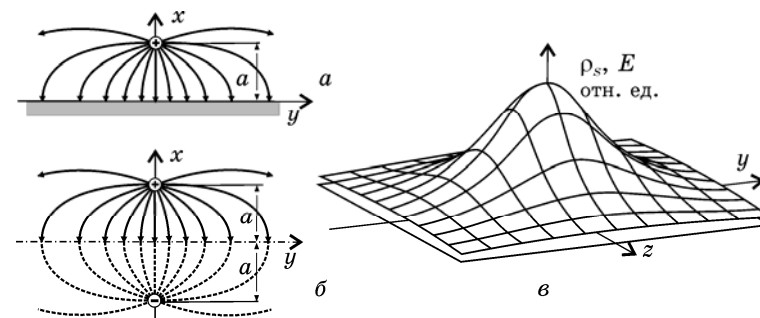


Рис. 2.5. Поле між точковим зарядом і індукованим на металевій поверхні зарядом протилежного знака (а) розраховується так само, як і поле між двома зарядами (б). Розподіл густини наведеного заряду по поверхні (в) такий, що об'єм фігури дорівнює зарядові над поверхнею.

Розрахувати поле між двома зарядами можна, скориставшись, як і в прикладі 2.2, принципом суперпозиції, підсумовуючи поля точкових зарядів  $\pm q$  у формі

$$E_{\pm} = \frac{\pm q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\pm}|^2}, \quad (2.24)$$

де  $\mathbf{r}_{0\pm} = \pm \mathbf{e}_x a$  – координати їхнього розташування (рис. 2.5, б).

З результатів такого розрахунку інтерес представляє розподіл напруженості електричного поля в площині  $yOz$ :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x \frac{aq}{2\pi\varepsilon_0 (a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.25)$$

Звідси випливає, по-перше, що в площині симетрії ( $x = 0$ ), тобто і на металевій поверхні, напруженість поля буде мати тільки нормальну складову. По-друге, цей вираз визначає розподіл поверхневої густини заряду  $\rho_s = \varepsilon_0 E_n$  (див. приклад 1.8), а її інтегрування по всій поверхні  $yOz$  дає результат  $\iint_{yOz} \rho_s dydz = -q$ ,

тобто, весь заряд, індукований на поверхні металу, дорівнює по величині і протилежний за знаком зарядові над поверхнею.

В електроніці метод дзеркальних відображень використовується для визначення форми потенціального бар'єра, що існує поблизу поверхні речовини і перешкоджає виходу електронів. Якщо електрон із зарядом  $-e$  вийшов з металу на відстань  $x$  (рис. 2.6), то з боку наведеного на поверхні заряду  $+e$  на нього діє сила, що повертає його назад і яка іноді називається *силою дзеркального відображення*

$$F(x) = -e^2/4\pi\epsilon_0(2x)^2 = -e^2/16\pi\epsilon_0x^2. \quad (2.26)$$

Потенціальна енергія електрона дорівнює роботі по подоланню цієї сили при його переміщенні з даної точки на нескінченність і визначається інтегруванням:

$$U(x) = \int_x^\infty F(x)dx = -e^2/16\pi\epsilon_0x. \quad (2.27)$$

Отримана потенціальна функція (рис. 2.6, в) має природний початок відліку:  $U(x) = 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Він відповідає мінімально можливій енергії вільного електрона у вакуумі і називається *рівнем вакууму*. Дана функція описує форму потенціального бар'єра поблизу поверхні, а робота, чинена електронном по подоланню сил цього бар'єра, називається *роботою виходу*.

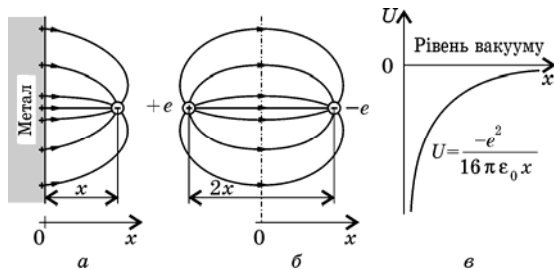


Рис. 2.6. На електрон, емітований з металу (а), діє повертаюча сила «дзеркального відображення» (б), що визначає форму потенціального бар'єра (в), що перешкоджає виходові.

**Приклад 2.5. Просторовий заряд у плоскому діоді.** Як приклад самоузгодженої задачі розглянемо, як змінюється поле в плоскому конденсаторі (див. приклад 2.3) при наявності між його

пластинами просторового заряду. Така ситуація має місце у вакуумному діоді, де електричне поле створюється не тільки джерелом анодної напруги, але і зарядом електронів, що емітовані з катода і рухаються у міжелектродному просторі до анода.

Як і в прикладі 2.3, розглянемо плоску конструкцію нескінченно широких електродів (рис. 2.7, а), правий з яких є анодом, а лівий (катод) є джерелом електронів з необмеженою емісією ( $j_0 = \infty$ ). Прийнемо початок відліку потенціалу на катоді ( $V(0) = 0$ ), тоді потенціал анода  $V(d) = V_a$ . Вважаючи, що початкові швидкості вильоту електронів з катода рівні 0 ( $v(0) = 0$ ), ми повинні також прийняти, що  $dV/dx|_{x=0} = 0$ . Інакше при полі, що прискорює, ( $dV/dx > 0$ ) всі електрони досягали б анода, а при гальмуючому ( $dV/dx < 0$ ) жоден електрон не попадав би в міжелектродний простір.

Математична модель для аналізу цієї задачі може бути разом із граничними умовами для потенціалів на електродах записана у вигляді:

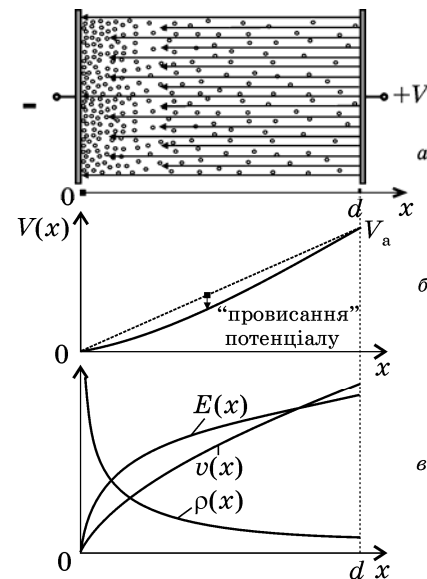


Рис. 2.7. Поле просторового заряду електронів у вакуумному діоді (а) послабляє поле зовнішнього джерела і викликає «провисання» розподілу потенціалу в порівнянні з плоским конденсатором (б). Таке поле не буде однорідним: розподіл напруженості поля визначає і вид розподілів швидкості і густини заряду (в).

$$\begin{cases} d^2V/dx^2 = -\rho(x)/\epsilon_0, \\ j = v(x)-\rho(x)/, \\ v(x) = \sqrt{2(e/m)V(x)}, \end{cases} \quad (2.28)$$

і являє собою самоузгоджену систему з рівняння Пуассона, рівняння безперервності (відзначимо, що  $j = \text{const}(x)$ , тобто

густина струму в будь-якому перетині постійна) і рівняння руху електрона в статичному полі у вигляді співвідношення між швидкістю електрона та прискорюючим потенціалом, яке слідує з (2.5).

Послідовна підстановка  $\rho(x)$  і  $v(x)$  у рівняння Пуассона приводить до рівняння

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{j}{\varepsilon_0 \sqrt{2(e/m)}} V^{-1/2},$$

яке після домноження лівої і правої частин на  $2dV/dx$  можна перетворити до вигляду

$$d\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{2j}{\varepsilon_0 \sqrt{2(e/m)}} V^{-1/2} dV.$$

Інтегруючи від значень на катоді ( $dV/dx|_{x=0}=0$ ,  $V(0) = 0$ ) до поточних значень, одержимо

$$\frac{dV}{dx} = \sqrt{\frac{4j}{\varepsilon_0 \sqrt{2(e/m)}}} V^{1/4}.$$

Розділяючи змінні і знову інтегруючи в межах від нульових до поточних значень, одержимо функцію розподілу потенціалу

$$V(x) = \left(\frac{9j}{4\varepsilon_0 \sqrt{2(e/m)}}\right)^{2/3} x^{4/3}. \quad (2.29)$$

Звідси можуть бути отримані й інші розподіли: напруженості поля –  $E(x) \sim x^{1/3}$ , швидкості електронів –  $v(x) \sim x^{2/3}$ , густини електронного заряду –  $\rho(x) \sim -x^{-2/3}$ .

Порівнюючи отриманий розподіл поля з полем у «холодному» (тобто без електронів) конденсаторі, бачимо (рис. 2.7, б), що присутні в міжелектродному проміжку електрони своїм зарядом викликають зниження потенціалу і «провисання» функції  $V(x)$  на відміну від його лінійного розподілу в плоскому конденсаторі. Електричне поле також не буде однорідним, його напруженість спадає від максимального значення на аноді до нульового значення на катоді (рис. 2.7, в). Силові лінії не доходять до катода: починаючись на аноді, вони закінчуються на електронах, що створюють просторовий заряд. Густина просторового заряду, тобто і концентрація електронів, нескінченна

на катоді, де швидкість руху електронів дорівнює нулеві, і поступово зменшується в міру прискорення електронів до анода.

Отримані рішення дозволяють одержати ще один важливий результат. З виразу (2.29) для розподілу потенціалу в точці  $x = d$ , де  $V(d) = V_a$ , можна одержати вираз для густини анодного струму

$$j = \frac{4\varepsilon_0 \sqrt{2e/m}}{9d^2} V_a^{3/2}. \quad (2.30)$$

Дане співвідношення визначає вольтамперну характеристику вакуумного діода (рис. 2.8) і звичайно називається «законом ступеня 3/2». Для порівняння розглянемо її ідеалізований вигляд (штрихова лінія) без врахування просторового заряду. Якщо припустити, що всі електрони вилітають з катода з нульовими початковими швидкостями, то при від'ємному анодному потенціалі анодний струм буде відсутній. Але для кожного, як завгодно малого додатнього потенціала анода, якщо електрони своїм полем не впливають на рух один одного, усі вони будуть попадати на анод і створювати анодний струм, рівний струму емісії (режим насичення). Подібне насичення виявляється у діодах і при наявності просторового заряду, якщо струм емісії з катода є обмеженим. Але до настання насичення спостерігається *обмеження струму просторовим зарядом*, і в цьому режимі є можливість *керувати струмом* зміною анодної напруги.

У реальних діодах електрони емітуються з деякими початковими швидкостями, що залежать від виду емісії, і біля катода утворюється область від'ємного потенціалу (рис. 2.9) з характерним мінімумом  $V_{\min}$  і відповідним гальмуючим електричним полем на ділянці між точками 0 та  $x_{\min}$ . Величина  $V_{\min}$  залежить як від початкових швидкостей електронів, так і від поля зовнішнього джерела. Саме ця область просторового заряду, називана іноді «віртуальним катодом», виконує регулюючі функції у режимі обмеження струму просторовим зарядом. Подолати область гальмуючого поля можуть тільки ті електрони, початкова енергія вильоту яких (у напрямку осі  $x$ )  $mv^2(0)/2 > eV_{\min}$ . Збільшення анодної напруги послаблює гальмуюче поле просторового заряду, зменшуючи значення  $V_{\min}$  і збільшуючи кількість електронів, що долають електричне поле та створюють анодний струм. За цих умов «закон ступеня 3/2» не виконується, але розглянута модель може служити гарним наближенням для області  $x > x_{\min}$ , якщо анодний потенціал відраховувати від мінімуму потенціалу «віртуального катода» (див. додаткову координатну систему на рис. 2.9).



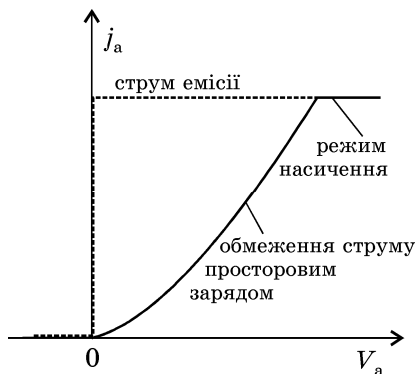


Рис. 2.8. Вольт-амперна характеристика ідеалізованого вакуумного діода з обмеженою емісією електронів і без впливу їхнього просторового заряду повинна мати ступінчастий вигляд (штрихова лінія). Просторовий заряд обмежує анодний струм (суцільна лінія) при його значенні, меншому за струм емісії.

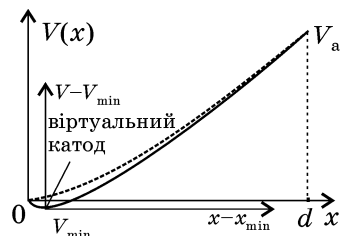


Рис. 2.9. При скінченних значеннях швидкості вильоту електронів біля катода утворюється потенціальний мінімум з ділянкою гальмуючого поля, що регулює величину анодного струму.

Слід зазначити, що даний закон виявляється справедливим не тільки для плоскої конструкції, він досить універсальний і використовується як основа для моделювання керування струмом у багатьох вакуумних приладах.

**Приклад 2.6. Екранування зовнішнього поля поверхнею провідної речовини.** У прикладі 1.8, де розглядалися граничні умови для електричного поля біля поверхні ідеального металу, використовувалася модель нескінченно тонкого шару поверхневого заряду, що екранує внутрішню область від зовнішнього електричного поля. У реальних умовах цей заряд концентрується в приповерхньому шарі скінченної товщини. Для формування фізичної моделі помістимо в плоский конденсатор з однорідним електричним полем (рис. 2.10, а) зразок провідної речовини, у якій провідність забезпечується вільними електронами. Під дією поля зовнішнього джерела електрони будуть зміщуватися до поверхні доти, поки внутрішнє поле, викликане зсувом зарядів, цілком не компенсує зовнішнє. Просторовий заряд, що утвориться біля поверхні і екранує зовнішнє поле, буде визначатися перевищенням концентрації електронів  $n(x)$  над її значенням  $n_0$  при відсутності поля, а об'ємна густина заряду дорівнюватиме

$$\rho(x) = -e[n(x) - n_0]. \quad (2.31)$$

Розподіл електронів у просторі  $n(x)$  визначається спільною дією двох факторів: з одного боку, електричне поле буде притягати їх до поверхні, а з іншої, тепловий хаотичний рух буде приводити до їхньої дифузії від поверхні. При врівноважуванні цих процесів розподіл концентрації  $n(x)$  може бути описано розподілом Больцмана

$$n(x) = n_0 \exp[e(x)/kT]. \quad (2.32)$$

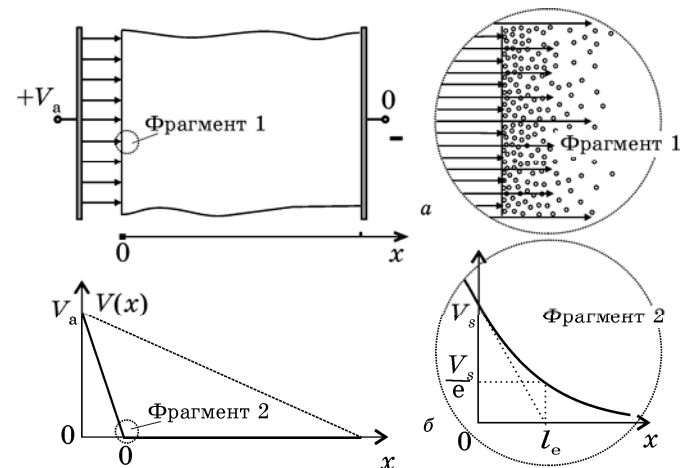


Рис. 2.10. Силві лінії зовнішнього електричного поля закінчуються на шарі поверхневого заряду, не проникаючи усередину провідної речовини. У кружках показаний розподіл поля і заряду в приповерхньому шарі в збільшеному масштабі.

Співвідношення (2.31) і (2.32) разом з рівнянням Пуассона  $d^2V/dx^2 = -\rho(x)/\epsilon\epsilon_0$  являють собою самоузгоджену систему рівнянь. Як граничні умови виберемо початок відліку потенціалу вдалині від поверхні ( $V(\infty) = 0$ ) і будемо вважати заданим потенціал поверхні  $V(0) = V_s$ . Підставляючи  $\rho(x)$  і  $n(x)$  у рівняння Пуассона, одержимо

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{en_0}{\epsilon\epsilon_0} \{\exp[eV(x)/kT] - 1\}$$

Для спрощення рішення обмежимося випадком, коли потенціал  $V(x) \ll kT/e$  і можна прийняти, що  $e^{\alpha} \approx 1 + \alpha$  (величину

$kT/e$  іноді звуть тепловим потенціалом). При такому припущенні останнє рівняння спроститься

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{e^2 n_0}{\epsilon \epsilon_0 kT} V(x),$$

а його розв'язок при заданих граничних умовах матиме вигляд:

$$V(x) = V_s \exp(-x/l_e). \quad (2.33)$$

Тут уведено як позначення так називану *довжину екранування*

$$l_e = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 kT / e^2 n_0}, \quad (2.34)$$

яка характеризує швидкість експонентного спадання (рис. 2.10, б) функції  $V(x)$  і є мірою глибини проникнення електричного поля у речовину. На відстані  $l_e$  поверхневий потенціал зменшується в  $e \approx 2,7$  разів, а на відстані  $(3...5)l_e$  електричне поле вважається звичайно знехтувально малим.

Кількісна оцінка для металів з концентрацією електронів  $10^{28}...10^{29} \text{ м}^{-3}$  дає значення довжини екранування порядку міжатомної відстані, що з макроскопічної точки зору цілком виправдовує модель нескінченно тонкого шару заряду, розглянуту в прикладі 1.8. Для напівпровідників з концентрацією  $10^{22}...10^{20} \text{ м}^{-3}$  вона складає  $0,1...1 \text{ мкм}$ .

Ще одна інтерпретація величини  $l_e$  впливає з розгляду надлишкової концентрації електронів

$$\Delta n(x) = n(x) - n_0 \approx (en_0/kT)V(x) = \Delta n_s \exp(-x/l_e), \quad (2.35)$$

які створюють просторовий заряд (рис. 2.11). Тут  $\Delta n_s = en_0 V_s / kT$  – концентрація надлишкових електронів на поверхні. Особливість цієї функції полягає в тому, що

$$\int_0^{\infty} \Delta n(x) dx = \Delta n_s l_e. \quad (2.35)$$

Цей результат дозволяє замість реального розподілу заряду використовувати спрощене уявлення про те, що всі електрони розташовані рівномірно з густиною  $\Delta n_s$ , але тільки у приповерхневому шарі товщиною  $l_e$  (рис. 2.11).

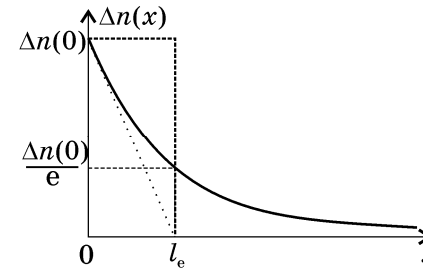


Рис. 2.11. Плавний розподіл надлишкової концентрації електронів (суцільна лінія) може бути замінений ступінчастим (штрихова лінія) з концентрацією, рівною поверхневому значенню, і товщиною шару, рівною довжині екранування.

Важливий результат проведеного аналізу зв'язаний також з тим, що величина поверхневого заряду залежить від поверхневого потенціалу, що використовується для керування поверхневою провідністю зміною потенціалу  $V_s$ .

В аналітичних розрахунках електричного поля при не досить складній конфігурації електродів із заданими граничними умовами може статися ефективним розв'язання рівнянь Пуассона або Лапласа *методом розділення змінних*. Суть цього методу полягає в тому, що невідому функцію розподілу потенціалу подають як добуток функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї координати. Якщо підставити  $V(x, y) = X(x)Y(y)$  (розглянемо для спрощення двовимірний випадок) в рівняння Лапласа та поділити на добуток  $XY$ , матимемо

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Сума двох незалежних між собою функцій може дорівнювати нулю тільки в тому випадку, коли кожна з них є сталою. Тому, позначаючи перший доданок  $k_x^2$ , другий –  $k_y^2$ , одержимо

$$d^2 X / dx^2 - k_x^2 X = 0;$$

$$d^2 Y / dy^2 - k_y^2 Y = 0.$$

Тут  $k_x$  і  $k_y$  – так звані *сталі розділення*, для яких справедливе співвідношення  $k_x^2 + k_y^2 = 0$  і які треба визначати із додаткових умов.

В результаті одне рівняння в частинних похідних зводиться до двох звичайних диференціальних рівнянь, розв'язування яких значно простіше.

**Приклад 2.8. Поле сітки над провідною поверхнею.**

Представимо сітку (рис. 2.12, а) у вигляді тонких провідників, паралельних провідній площині, розташованих на відстані  $a$  один від одного і на відстані  $d$  від площини. Для використання методу розділення змінних у цій задачі зазначимо, що через періодичність структури розподіл поля також буде періодичною функцією координати  $x$ . Тому розподіл потенціалу при  $y = \text{const}$  можна представити у вигляді суми гармонічних функцій. Якщо вибрати розташування координатної системи так, щоб початок осі  $x$  проходив через центр провідника, як на рис. 2.12, а, то можна обмежитися тільки парними функціями типу  $\cos k_n x$ , причому для кожної гармоніки необхідна своя функція  $Y_n(y)$ . У підсумку розподіл потенціалу представимо у вигляді:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \cos k_n x. \quad (2.36)$$

З умови періодичності потенціалу  $V(x, y) = V(x + a, y)$  випливає, що  $\cos k_n x = \cos k_n(x + a)$  і  $k_n a = 2\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), відкіля знаходимо константи розділення  $k_n = 2\pi n/a$ . Підставляючи (2.36) у рівняння Лапласа і виконуючи описану процедуру розділення змінних, одержимо для кожної з функцій  $Y_n(y)$

$$d^2 Y_n / dy^2 - k_n^2 Y_n = 0. \quad (2.37)$$

Рішення цього рівняння запишемо у вигляді

$$Y_n(y) = C_{1n} \exp(-k_n y) + C_{2n} \exp(+k_n y). \quad (2.38)$$

Для  $n = 0$  рівняння (2.37) має особливий розв'язок. Воно приймає вигляд  $d^2 Y_0 / dy^2 = 0$  та, як і поле в плоскому конденсаторі, описує лінійну складову потенціалу:

$$Y_0(y) = C_{10} y + C_{20}. \quad (2.39)$$

При заданих потенціалах на електродах (нехай сітка має нульовий потенціал, тобто  $V(0, 0) = 0$ , а металева поверхня деякий позитивний  $-V(x, -d) = V_a$ ) легко визначити, що  $C_{20} = 0$ ,  $C_{10} = -V_a/d$ , а  $Y_0(y) = -V_a y/d$ . Очевидно також, що для області над сіткою ( $y \rightarrow \infty$ ) необхідно прийняти, що коефіцієнти  $C_{2n} = 0$ , тому що потенціал там не може нескінченно зростати. У просторі між площиною і сіткою можна скоротити кількість постійних, якщо знайти зв'язок між константами  $C_{1n}$  і  $C_{2n}$  з умови  $V(x, -d) = V_a$ . Подальше знаходження постійних інтегрування досить важке, для цього треба задавати конкретну форму поперечного перерізу

провідників сітки. Але навіть без такої процедури можна зробити корисні висновки.

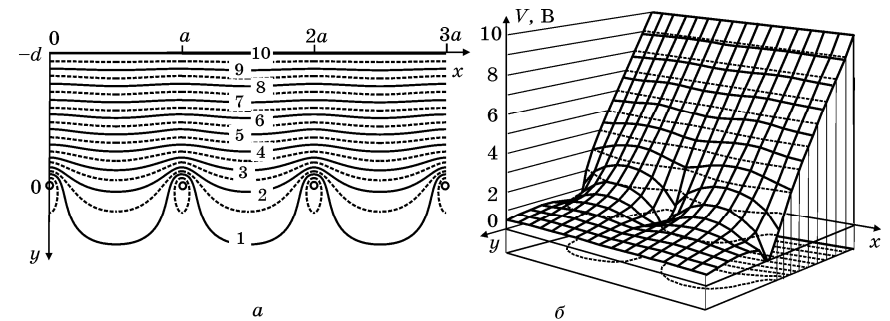


Рис. 2.12. Розподіл поля між сіткою і плоским електродом, представлений у вигляді еквіпотенціалів із кроком 0,5 В (а), і відповідний потенціальний рельєф у косокутній проекції (б). Поле проникає в простір за сіткою на відстань порядку кроку сітки.

Поле позитивного електрода проникає в простір над сіткою, експоненціально спадаючи за законом  $\exp(-k_n y)$ . Швидкість спаду визначається константою розділення  $k_n$ , а відстань, на яку проникає поле, складає величини порядку  $1/k_n = a/2\pi n$  і обернено пропорційна номеру просторової гармоніки  $n$ . На рис. 2.12, а представлена картина поля у вигляді еквіпотенціалів, розрахована для нульового потенціалу сітки і  $V_a = 10$  В. Вони є лініями однакового потенціалу на «тривимірній» функції  $V(x, y)$ , зображеній на рис. 2.12, б. На відстані від сітки, рівній її періодові, перша гармоніка послабляється в  $e^{2\pi}$  раз, а інші гармоніки спадають ще швидше. Така властивість говорить про високу якість екранування сіткою зовнішніх полів.

Крім того, проникнення поля через сітку використовують для керування електронними потоками у вакуумних приладах.

**Приклад 2.9. Поле збідненого шару в напівпровіднику.**

Збіднений шар утворюється в багатьох напівпровідникових приладах: МДП-структурах (а), поблизу деяких контактів метал-напівпровідник (б), у границі контакту різних напівпровідників (в) та ін. Як модельний об'єкт розглянемо зразок напівпровідника (рис. 2.13, а) з донорною домішкою, атоми якої при кімнатній температурі, віддаючи свій «зайвий» електрон, стають позитивно зарядженими іонами. При створенні на поверхні яким-небудь чином від'ємного потенціалу  $V_s$  (наприклад, за допомогою зовнішнього джерела, як на рис. 2.10, а) електрони витісняються з приповерхньої області і там утвориться збіднений ними шар.

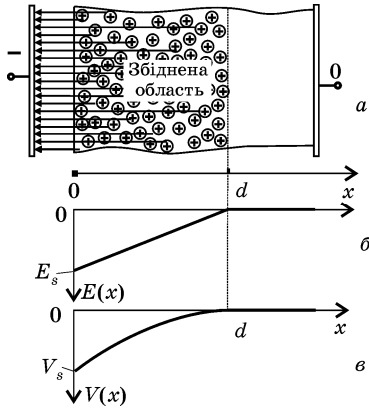


Рис. 2.13. Збіднений електронами шар (а) просторового заряду біля поверхні донорного напівпровідника та розподіл напруженості електричного поля (б) і потенціалу (в).

При потенціалах  $V_s$  порядку десятих часток або одиниць вольт зарядом рухливих електронів можна знехтувати, і об'ємна густина заряду буде визначатися тільки концентрацією іонів домішки:  $\rho = eN$ . Якщо вважати, що домішка розподілена в напівпровіднику макроскопічно рівномірно, то відповідне рівняння Пуассона буде мати постійну праву частину. В одновимірному випадку  $d^2V/dx^2 = -eN/\epsilon\epsilon_0$ . Інтегруючи, одержимо  $dV/dx = -(eN/\epsilon\epsilon_0)x + C_1$ ,  $V(x) = -(eN/2\epsilon\epsilon_0)x^2 + C_1x + C_2$ . Для визначення констант інтегрування прийемо початок відліку потенціалу на границі збідненої і нейтральної областей [ $V(d) = 0$ ] і будемо вважати відомим потенціал поверхні [ $V(0) = V_s < 0$ ]. Крім того, для визначення поки невідомої товщини збідненого шару необхідно використовувати ще одну умову – напруженість поля на границі областей спадає до 0 [ $dV/dx|_{x=d} = 0$ ]. У результаті можна одержати (рис. 2.14), що вектор напруженості електричного поля спрямований від заряджених іонів домішки до поверхні і зменшується лінійно (б):

$$E(x) = -e_x \frac{dV}{dx} = -e_x \frac{eN}{\epsilon\epsilon_0} (d - x), \quad (2.40)$$

потенціал параболічно зростає (в) від значення  $V_s < 0$  до 0:

$$V(x) = -\frac{eN}{2\epsilon\epsilon_0} (d - x)^2, \quad (2.41)$$

а товщина збідненої області і поверхневий потенціал зв'язані співвідношенням  $V_s = -eNd^2/2\epsilon\epsilon_0$ . Звідси випливає, що

$$d = \sqrt{2\epsilon\epsilon_0 |V_s| / eN}, \quad (2.42)$$

і товщина тим менша, чим більша концентрація домішки, а також залежить від поверхневого потенціалу. Цей факт використовується, наприклад, для керування провідністю поверхневого шару.

#### 2.1.4. Чисельний розрахунок електростатичних полів.

У більшості розглянутих прикладів результати розрахунку розподілу поля отримані у вигляді аналітичних функцій, які дозволяють знайти потенціал або напруженість поля у будь-якій точці простору (за винятком, мабуть, деяких особливих точок). Однак при більш складній конфігурації електродів аналітичний розрахунок стає практично неможливим і доводиться використовувати так називані *чисельні методи інтегрування* рівнянь Лапласа або Пуассона. Вони дозволяють наближено розраховувати поле у визначених дискретних точках простору, причому кількість точок і точність розрахунку в них можна вибирати будь-якими, у залежності від необхідного ступеня деталізації поля і трудомісткості розрахунків.

Одним з найбільш розповсюджених є *метод скінченних різниць*. В основу методу покладена заміна похідних у рівнянні Лапласа малими приростами. Розглянемо його для плоского поля  $V(x, y)$ . Надаючи по черзі аргументам  $x$  і  $y$  деякої безперервної функції  $V(x, y)$  малого приросту з кроком  $h$ , можна приблизно (з точністю до величин другого порядку малості відносно  $h^2$ ) замінити частинні похідні функції відношеннями різниць (рис. 2.14):

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \begin{cases} [V(x, y) - V(x - h, y)] / h & \text{— ліворуч,} \\ [V(x + h, y) - V(x, y)] / h & \text{— праворуч,} \end{cases} \quad (2.43a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \approx \begin{cases} [V(x, y) - V(x, y - h)] / h & \text{— унизу,} \\ [V(x, y + h) - V(x, y)] / h & \text{— угорі.} \end{cases} \quad (2.43b)$$

Подібним чином для частинних похідних другого порядку можна записати через приріст перших похідних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h} \left[ \frac{V(x + h, y) - V(x, y)}{h} - \frac{V(x, y) - V(x - h, y)}{h} \right] = \\ &= [V(x + h, y) + V(x - h, y) - 2V(x, y)] / h^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx [V(x, y+h) + V(x, y-h) - 2V(x, y)] / h^2;$$

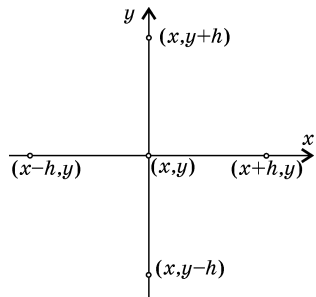


Рис. 2.14. П'ятиточкова схема для обчислення похідних через скінченні прирости і розрахунку потенціалів.

При цьому двовимірне диференціальне рівняння Лапласа

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 = 0$$

наближено замінюється наступним алгебраїчним рівнянням:

$$V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h) - 4V(x, y) = 0. \quad (2.44)$$

Дане різницеве рівняння зв'язує між собою значення шуканої функції в п'ятиох сусідніх точках, розташованих як зазначено на рис. 2.14. Простий фізичний зміст цього рівняння одержимо, якщо представити його у формі

$$V(x, y) = [V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h)] / 4, \quad (2.45)$$

– потенціал у кожній точці простору дорівнює середньому арифметичному значенню потенціалів у сусідніх точках. Варто помітити, що таке просте представлення рівняння Лапласа виходить тільки в прямокутних координатах при рівних приростах (кроках) по осях  $x$  і  $y$ , а в інших випадках воно матиме інший вигляд.

Порядок дій для організації розрахунку може бути наступним.

*Вибір області інтегрування*, де розраховується поле, – це частина алгоритму, яка найбільш важко формалізується. Найпростішою і зручною є прямокутна область, у границях якої локалізоване поле. Це може бути, наприклад, деяка область напівпровідникового приладу (рис. 2.15, *a*) з розташованими там електродами. Якщо поля не дуже локалізовані в деякій області простору, наприклад, при розрахунку поля системи зарядів,

можна ввести деякий додатковий електрод з нульовим потенціалом (рис. 2.15, *б*), що «обрізає» поле на такій відстані від зарядів, де потенціал знехтувально малий, або установити вільну границю (рис. 2.15, *в*), на якій поле достатньо слабе, а потенціал змінюється повільно.

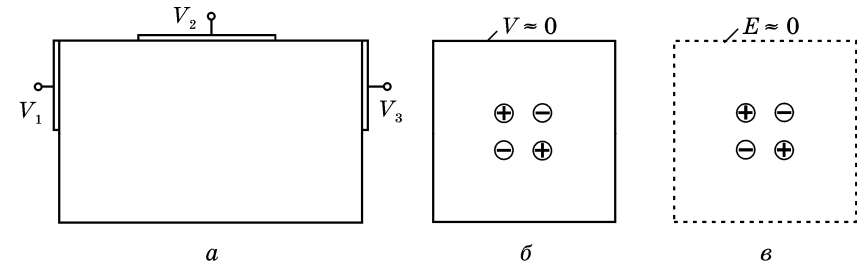


Рис. 2.15. Область чисельного розрахунку поля може бути обмежена природними границями напівпровідника (*a*), введенням електрода, що екранує, (*б*) там, де потенціал можна вважати нульовим, або вільною границею (*в*), де напруженість поля знехтувально мала.

Природно, що при виборі області інтегрування варто враховувати симетрію конструкції і заданих потенціалів (електричного поля). Важливо, щоб обрана модель електродів не сильно спотворювала поле порівняно з полем у реальному об'єкті.

*Дискретний масив точок*, в яких розраховується потенціал, визначається точками перетину (вузлами) ліній сітки, що будується в області інтегрування. Кількість вузлів сітки визначається як необхідним ступенем деталізації поля, так і необхідною похибкою розрахунку, і звичайно складає величини порядку 10...100 по кожній з координат. У найпростішому випадку крок сітки вибирається постійним і однаковим по осях  $x$  та  $y$  (рис. 2.16, *a*). Але часто крок сітки роблять змінним, так щоб у тих областях, де потенціал змінюється швидше, крок був дрібнішим (рис. 2.16, *б*).

Для складання основної частини *системи рівнянь* необхідно для усіх внутрішніх вузлових точок, що не збігаються з електродами і не розташовані на границі області інтегрування, тобто для точок з номерами (на прикладі конструкції рис. 2.16, *a*)  $i = 1, \dots, (m-1)$  і  $j = 1, \dots, (n-1)$  записати рівняння (2.44) у вигляді

$$4V_{i,j} + V_{(i-1),j} + V_{(i+1),j} + V_{i,(j-1)} + V_{i,(j+1)} = 0. \quad (2.46)$$

Це рівняння для змінних  $i$  і  $j$  являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку треба вирішити, доповнивши її співвідношеннями для розрахунку потенціалів в інших точках, де правило (2.46) не може бути використане. До таких точок

відносяться вузли, де потенціали фіксовані напругою джерел живлення, і вузли на границі області інтегрування, для яких не існує чотирьох сусідніх вузлів. В останніх необхідно вводити інші правила для розрахунку потенціалів, так називані граничні умови.

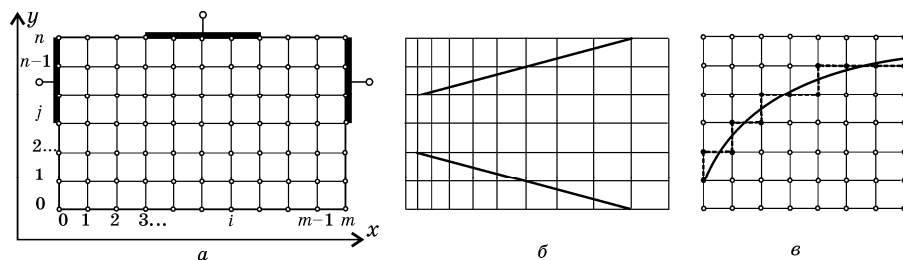


Рис. 2.16. Дискретизація простору інтегрування за допомогою сітки з постійним кроком (а). В області більш сильного поля (б) крок сітки може бути обраний більш дрібним. Електроди складного профілю (в) замінюються дискретним набором найближчих вузлів.

Граничні умови існують двох видів. Умови Дірихле припускають присвоєння вузловим точкам, що збігаються з електродами, відомих значень потенціалів цих електродів. Якщо електроди мають складний профіль, то їх можна замінити ламаною лінією, що проходить по вузлах сітки і відхиляється від дійсної форми менш, ніж на половину кроку сітки (рис. 2.16, в).

У другому виді граничних умов, умовах Неймана, приймають рівність нулевій похідній від потенціалу в напрямку нормалі  $\mathbf{n}$  до границі:  $\partial V / \partial \mathbf{n} = 0$ . Вони виконуються на границі напівпровідник-повітря (див. розд. 1.5) наближено; для осей симетрії, де функція  $V(\mathbf{n})$  має максимум або мінімум, ці умова є точними. Їх також наближено використовують на такій відстані від електродів, де поле слабке і зміною потенціалу можна знехтувати при обраній точності розрахунків.

Реалізувати ці умови при обчисленнях можна різними способами. По-перше, можна присвоїти граничним точкам значення потенціалів приграничного ряду. Наприклад, для лівої границі (рис. 2.16, а)  $V_{0,j} = V_{1,j}$ , для нижньої границі  $V_{i,0} = V_{i,1}$ , і т.п. По-друге, подумки доповнивши сітку ще одним рядом вузлів за межами області інтегрування (рис. 2.17, а), присвоюємо їм потенціал граничних точок ( $V_{-1,j} = V_{0,j}$ ). Застосування (2.46) у цій вже п'ятиточковій схемі до граничних вузлів дає таке правило для обчислення в них потенціалу:

$$V_{0,j} = (V_{1,j} + V_{0,(j-1)} + V_{0,(j+1)})/3. \quad (2.47)$$

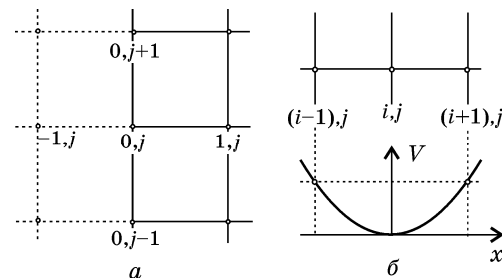


Рис. 2.17. Способи врахування граничних умов у поверхні напівпровідника (а) і на осі симетрії (б), що ґрунтуються на рівності нулевій похідній уздовж нормалі.

По-третє, розрахунок на границі можна робити так само, як і на осі симетрії (рис. 2.17, б), де похідна в напрямку осі також дорівнює 0, а симетричні потенціали однакові. Тому  $V_{(i-1),j} = V_{(i+1),j}$ , а для граничних точок

$$V_{0,j} = (2V_{1,j} + V_{0,(j-1)} + V_{0,(j+1)})/4. \quad (2.48)$$

Вибір тієї чи іншої форми граничних умов Неймана обумовлюється в основному зручністю програмування процедури обчислень.

Розв'язок системи рівнянь (2.46), доповненої граничними умовами, можна робити одним з досить численних методів. При пошуку найбільш ефективного методу необхідно прийняти до уваги, що матриця коефіцієнтів цієї системи буде сильно розрідженою: оскільки в (2.46) потенціал у кожній точці зв'язаний з потенціалами тільки в чотирьох сусідніх точках, то в матриці буде багато нульових коефіцієнтів.

Широко поширеним і повчальним при ручних розрахунках є ітераційний метод (метод послідовних наближень). Насамперед задаються довільними початковими значеннями потенціалу у всіх внутрішніх вузлах і на вільних границях, де потрібно розраховувати потенціали. Цей масив значень  $V^{(0)}_{i,j}$  разом з потенціалами на електродах становить так назване нульове наближення. Потім розраховують нові значення потенціалів у всіх внутрішніх вузлах сітки за формулою (2.46), а на вільних границях – відповідно до тієї чи іншої форми умов Неймана, і одержують перше наближення. Використовуючи розраховані потенціали  $V^{(1)}_{i,j}$  і граничні значення, знаходять функції  $V^{(2)}_{i,j}$  другого наближення і т.д. Ітераційний процес продовжується доти, поки  $(n+1)$ -е наближення не дасть значень потенціалу у всіх вузлах, що збігаються (у межах заданої точності) з  $n$ -м наближенням. Звісно, варто мати на увазі, що чим точніше буде обране нульове наближення, тим швидше буде йти процес збіжності і, відповідно, меншу кількість ітерацій буде потрібно для досягнення необхідної точності. Цьому ж сприяє і порядок

проходження вузлів при перерахуванні: варто рухатися від електродів, де задані потенціали, до вільних границь.

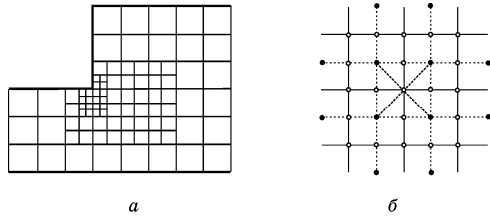


Рис. 2.18. Ділення кроку сітки навпіл може бути зроблене в окремій локальній області (а), де поле більш сильне. П'ятиточкова схема (б) для знаходження нульового наближення для більш дрібної сітки через розраховані значення потенціалів у вузлах (темні точки) сітки з попереднім кроком.

Досить ефективно для зменшення часових витрат використовувати при організації обчислень наступний прийом: спочатку розв'язок варто знаходити при малій кількості клітинок сітки, розмір яких обумовлюється приблизно з таким розрахунком, щоб у кожній частині області інтегрування було не менше двох рядків клітинок. Потім розв'язок уточнюють, зменшуючи крок сітки вдвічі, потім вчетверо і т.д. по всій області чи в тій її частині, де бажано мати більш точний розв'язок (рис. 2.18, а). При цьому попередній розв'язок використовується для одержання нульового наближення для обчислень з більш дрібною сіткою. Для визначення нового нульового наближення у відсутніх в попередніх ітераціях точках може використовуватися те ж правило (2.46) п'ятиточкової схеми, але «сусідніми» вибираються вже розраховані значення потенціалів у вузлах, розташованих по діагоналі (рис. 2.18, б).

Розрахунок напруженості електричного поля провадиться по співвідношеннях  $E_x = -\partial V/\partial x$ ,  $E_y = -\partial V/\partial y$ , що наближено обчислюються через скінченні різниці (2.43). Використовуючи значення похідних ліворуч і праворуч, можна знайти середнє арифметичне

$$E_{x\ i,j} = (V_{(i-1),j} - V_{(i+1),j})/2h. \quad (2.49a)$$

Аналогічно

$$E_{y\ i,j} = (V_{i,(j-1)} - V_{i,(j+1)})/2h. \quad (2.49б)$$

Однак, у деяких випадках, зручно використовувати додаткову польову сітку, що зсунута відносно потенціальної на  $h/2$  (рис. 2.19) нагору і вправо. Значення складових напруженості в центрі виділеної на малюнку клітинки можна визначити за розрахованими потенціалами у найближчих вузлах потенціальної сітки:

$$E_x = (V_{i,j} - V_{(i+1),j} + V_{i,(j+1)} - V_{(i+1),(j+1)})/2h, \quad (2.50a)$$

$$E_y = (V_{i,j} - V_{i,(j+1)} + V_{(i+1),j} - V_{(i+1),(j+1)})/2h. \quad (2.50б)$$

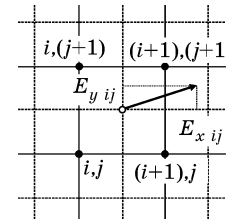


Рис. 2.19. Визначення напруженості поля у вузлі польової сітки (штрихові лінії) за знайденими значеннями потенціалів у найближчих вузлах потенціальної сітки (суцільні лінії).

Ці значення присвоюються всьому просторові усередині польової клітинки для подальшого розрахунку руху зарядів.

Візуалізація результатів розрахунку необхідна для інтегрального сприйняття великого масиву чисел і уявлення про отриману функцію розподілу потенціалу чи напруженості поля.

Потенціальна функція часто зображується за допомогою ліній рівного потенціалу чи *еквіпотенціалей* із указаними на них значеннями потенціалу. Для цього весь діапазон зміни потенціалу розбивається на рівні інтервали і з'єднуються точки з однаковими потенціалами. Природно, що для знаходження певного значення на кожній лінії сітки необхідно використовувати ті чи інші методи інтерполяції. Приклади такої побудови наведені на рис. 2.2, б і 2.12, а.

Інший розповсюджений спосіб полягає в побудові «тривимірної» потенціальної поверхні. Для цього в тій чи іншій косокутній системі координат будується просторова сітка (рис. 2.20) і в кожному з вузлів у певному масштабі по вертикальній осі відкладається розраховане значення потенціалу. Отримані сусідні точки потім з'єднуються у найпростішому випадку прямими лініями.

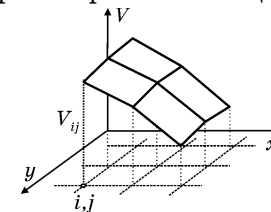


Рис. 2.20. Фрагмент побудови потенціальної поверхні. Результати такої побудови наведені на рис. 2.2, в і 2.12, б. Там же зображені лінії постійного рівня цих поверхонь, що і є еквіпотенціальними лініями.

Розподіл напруженості електричного поля найпростіше зображувати у вигляді векторного поля, де для кожного вузла по розрахованих проєкціях  $E_{x\ i,j}$  і  $E_{y\ i,j}$  в обраному масштабі будується вектор напруженості  $E_{ij}$ . Приклад такого представлення наведений на рис. 1.1, б.

## 2.2. МАГНІТОСТАТИКА

### 2.2.1. Основні рівняння магнітостатики

Магнітостатика вивчає магнітні поля, що не змінюються в часі. Реально за статичні вважають такі поля, напруженість яких не змінюється істотно за час спостереження, тому рівняння магнітостатики безпосередньо виходять з першого і четвертого рівнянь Максвелла, якщо в них прийняти  $\partial/\partial t = 0$ :

диференціальна форма	інтегральна форма	
$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$	$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{j} d\mathbf{S}$	
$\text{div } \mathbf{B} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$	(2.51)

Важливою властивістю магнітостатичного поля є те, що воно не здійснює роботи при вільному русі заряду. Щоб це показати, помножимо скалярно обидві частини рівняння руху заряду в магнітному полі  $d(m\mathbf{v})/dt = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  на вектор швидкості  $\mathbf{v}$  і врахуємо, що  $\mathbf{v}d(m\mathbf{v}) = d(mv^2/2) = dE_k$ . а  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{v} \equiv 0$ , де  $E_k$  – кінетична енергія заряду  $q$ . Отже

$$dE_k/dt = 0, \quad (2.52)$$

і зміни кінетичної енергії не відбувається. Зв'язано це з тим, що сила Лоренца  $F_L = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  перпендикулярна швидкості  $\mathbf{v}$  частки і не викликає прискорення *уздовж траєкторії*, а тільки скривлює її.

Технічно такі поля створюються постійними магнітами або електричними струмами, що протікають у провідному середовищі. У першому випадку відсутні макроскопічні струми ( $\mathbf{j} = 0$ ), і магнітостатичне поле описується рівняннями

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad \oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0 \quad (2.53)$$

Це означає, що магнітостатичне поле є безвихровим і по характеру просторового розподілу подібним до електростатичного поля. Така властивість дає можливість розраховувати розподіл магнітного поля для деякої скалярної функції, вводячи поняття *магнітостатичного потенціалу*  $V_m(\mathbf{r})$ , пов'язавши його з напруженістю магнітного поля співвідношенням, подібним до (2.3)

$$\mathbf{H} = -\text{grad } V_m(\mathbf{r}). \quad (2.54)$$

Підстановка (2.54) в рівняння  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  з врахуванням тотожності  $\text{div grad } f \equiv \nabla^2 f$  приводить до рівняння Лапласа для магнітостатичного потенціалу

$$\nabla^2 V_m = 0. \quad (2.55)$$

Використання магнітостатичного потенціалу дозволяє при розрахунках розподілів магнітного поля використовувати добре відпрацьовані методи розв'язку (у тому числі і чисельного) рівняння Лапласа, а також аналогії з розподілом електростатичних полів за подібних граничних умов.

Треба пам'ятати, що магнітостатичний потенціал не має такого фізичного сенсу, пов'язаного з роботою, як електростатичний; магнітне поле не здійснює роботи над зарядом.

Магнітні поля, що створюються постійними електричними струмами, не зовсім коректно називати статичними, оскільки струм створюється рухом зарядів. Доречніше їх називати стаціонарними. Відповідно до першого рівняння з (2.51) такі поля не є безвихровими або потенціальними. Але і в цьому випадку, враховуючи друге рівняння з (2.51) і тотожність  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) \equiv 0$ , можна ввести поняття *векторного магнітного потенціалу*  $\mathbf{A}$  через співвідношення

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (2.56)$$

Якщо підставляти (2.56) у перше рівняння (2.51) у диференціальній формі, то в лівій його частині буде вираз  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ . Тут треба мати на увазі, що вектор  $\mathbf{A}$  введено через диференціальне співвідношення, тому зміна його на будь-яку константу не впливає на величину  $\mathbf{B}$ . Більш того, додавання до вектора  $\mathbf{A}$  будь-якого градієнтного поля  $V(\mathbf{r})$  також не змінює вектора  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , оскільки  $\text{rot}(\text{grad } V) \equiv 0$ . Це дозволяє накласти на вектор  $\mathbf{A}$  деяку додаткову умову, що спрощує розрахунок поля. Зазвичай для магнітостатичних полів обирають

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (2.57)$$

При такому виборі перше рівняння (2.51) спрощується і приймає вигляд

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.58)$$

У результаті для векторного магнітного потенціалу ми отримали рівняння Пуассона, яке на відміну від електростатичного є векторним, еквівалентним трьом скалярним.



Природно, виникає питання про переваги використання вектора  $\mathbf{A}$  при розрахунках розподілу індукції  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  або напруженості  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  магнітного поля. По-перше, розв'язок рівняння Пуассона (2.58) можна отримати, як і для електростатичного потенціалу, в загальному вигляді

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}(r')dV_r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.59)$$

При заданому розподілі струмів у просторі інтегрування (2.59) може опинитися простішим, ніж інтегрування диференціального рівняння  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ . По-друге, обчислення потоку вектора індукції через деяку поверхню вимагає знаходження поверхневого інтеграла  $\Phi = \int_S \mathbf{B}d\mathbf{S}$ . В той же час обчислення потоку через векторний магнітний потенціал проводиться через циркуляцію вектора  $\mathbf{A}$  по контуру, що обмежує дану поверхню

$$\Phi = \int_S \text{rot } \mathbf{A}d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A}d\mathbf{l}. \quad (2.60)$$

### 2.2.2. Приклади розрахунку магнітних полів

**Приклад 2.10. Магнітне поле одиночного провідника.** На відміну від прикладу 1.1 тут розглянемо, по-перше, круглий провідник скінченного діаметру (рис. 2.21, а). По-друге, розрахунок розподілу поля проведемо на основі диференціальної форми першого рівняння Максвелла:  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ . Вибираючи циліндричну систему координат (рис. 2.21,а) і виходячи з осьової симетрії для прямого нескінченно довгого провідника, приймаємо:  $\partial/\partial z = \partial/\partial \varphi = 0$ . При цьому від виразу для оператора  $\text{rot}$  в циліндричній системі координат залишаються доданки

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{e}_r \cdot 0 - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial H_z}{\partial r} + \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}.$$

Оскільки вектор густини струму, що протікає по провіднику, має тільки  $z$ -складову ( $\mathbf{j} = \mathbf{e}_r \cdot 0 + \mathbf{e}_\varphi \cdot 0 + \mathbf{e}_z \cdot j(r)$ ), то вектор напруженості магнітного поля матиме тільки азимутальну  $\varphi$ -складову ( $\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \cdot 0 + \mathbf{e}_\varphi \cdot H(r) + \mathbf{e}_z \cdot 0$ ), а рівняння Максвелла для  $z$ -проекції набере вигляду

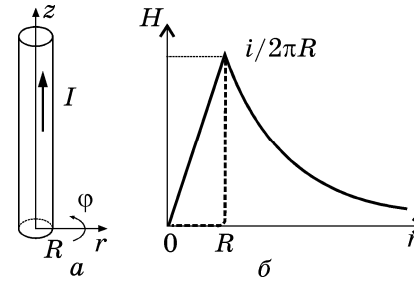


Рис. 2.21. Розподіл магнітного поля довкола циліндричного провідника із струмом. Штрихова лінія – для ідеально провідного провідника

Знаходження поля усередині провідника вимагає знання розподілу густини струму по його поперечному перетину. Якщо вважати провідник ідеальним, то усередині магнітне поле відсутнє (див. розд. 1.5), а весь струм протікає по поверхні з лінійною густиною  $j_s = i/2\pi R$ . Значення магнітного поля на поверхні дорівнює  $H(R) = i/2\pi R$  (приклад 1.9). У результаті отримуємо розподіл поля довкола провідника

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \cdot i/2\pi r. \quad (2.2)$$

У реальних провідниках питання про розподіл густини струму по поперечному перетину вимагає вельми детальних досліджень. Для тонких провідників при постійному струмі можна приблизно вважати, що струм розподілений рівномірно по перетину з густиною  $j = i/\pi R^2 = \text{const}$ , і рівняння (2.1) приймає вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{d(rH)}{dr} = i/\pi R^2. \quad (2.3)$$

Просте інтегрування цього рівняння дає  $rH = jr^2/2 + C_2$ . Оскільки на осі провідника ( $r = 0$ )  $H \neq \infty$ , то  $C_2 = 0$ . Звідси усередині провідника

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{e}_\varphi \cdot ir/2\pi R^2, \quad (2.4)$$

тобто напруженість поля лінійно зростає при віддаленні від осі (рис. 2.21,б), набуваючи на поверхні провідника такого ж значення, як і зовні  $H(R) = i/2\pi R$ .

$$\frac{1}{r} \frac{d(rH)}{dr} = j(r). \quad (2.1)$$

Для області простору поза провідником (при  $r > R = d/2$ ), де струм відсутній ( $j = 0$ ),  $d(rH)/dr = 0$  і  $rH = C_1$ . Константа інтегрування може бути знайдена з граничної умови, якою виступає значення магнітного поля на поверхні  $H(R)$ :  $C_1 = RH(R)$ . У результаті  $H(r) = H(R)R/r$ .

Знаходження поля усередині провідника вимагає знання розподілу густини

Для подальшого використання представимо отриманий розподіл у декартових координатах. З рис. 2.22 слідує прості співвідношення для такого переходу:

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi, \quad \cos\varphi = x/r, \quad \sin\varphi = y/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

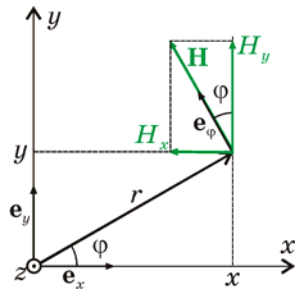


Рис. 2.22. Перехід від циліндричних координат до декартових

константа інтегрування – їх радіус.

**Приклад 2.11. Магнітне поле двопровідної лінії.** Розглянемо два паралельних круглих провідника, по яких струми протікають у протилежних напрямках (рис. 2.23,а). Для розрахунку розподілу магнітного поля, що створюється струмами, скористаємося методом суперпозиції полів довкола кожного провідника, які визначаються на основі розподілу в одиночному провіднику. Цей метод можна застосовувати, якщо магнітне поле одного провідника не впливає на розподіл густини струму в іншому. Таке наближення допустиме, коли відстань між провідниками істотно перевищує їх діаметр ( $d \gg a$ ).

Щоб скористатися результатами попереднього прикладу, необхідно у виразі (2.5) змістити початок відліку по осі  $y$  на  $\pm d$  і змінити знаки відповідно до напрямку протікання струмів. В результаті отримаємо для верхнього провідника

$$\mathbf{H}_1 = \frac{i}{2\pi} \frac{-\mathbf{e}_x(y-d) + \mathbf{e}_y x}{x^2 + (y-d)^2}, \quad (2.6)$$

а для нижнього

$$\mathbf{H}_2 = \frac{i}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_x(y+d) - \mathbf{e}_y x}{x^2 + (y+d)^2}. \quad (2.7)$$

Підсумовуючи останні вирази, після простих перетворень отримаємо

Підставляючи їх у вираз (2.2), отримуємо для вектора  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi} \frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x}{x^2 + y^2}. \quad (2.5)$$

Рівняння кривих  $dx/H_x = dy/H_y$ , що описують силові лінії в координатах  $x$  і  $y$  (див. додаток 1), при підстановці проєкцій  $H_x$  і  $H_y$  з (2.5) набуває вигляду  $x dx + y dy = 0$ . Його розв'язок  $x^2 + y^2 = C^2$  є рівнянням концентричних кіл, а

$$\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_x 2a(x^2 - y^2 + d^2) + \mathbf{e}_y 4dxy}{[x^2 + (y-d)^2][x^2 + (y+d)^2]}. \quad (2.8)$$

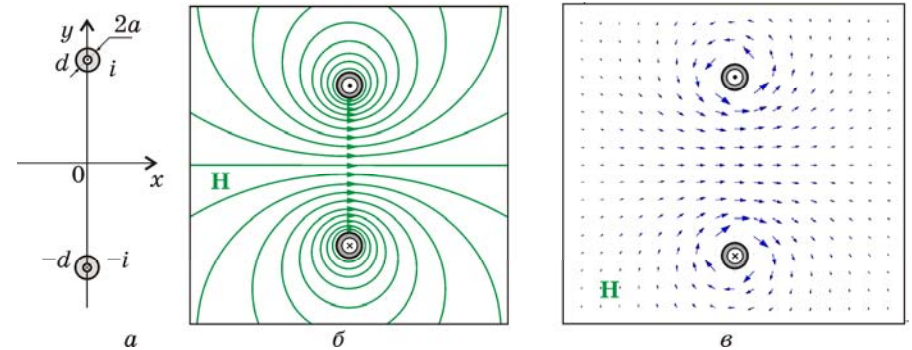


Рис. 2.23. Розташування координатних осей щодо провідників (а) і розподіл напруженості магнітного поля у вигляді силових ліній (б) і у вигляді векторного поля (в)

Для представлення розподілу поля у вигляді сімейства силових ліній треба вирішити рівняння  $dx/H_x = dy/H_y$ , яке після підстановки виразів для проєкцій з (2.8) набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 + d^2}. \quad (2.9)$$

Розв'язок цього рівняння можна представити у формі

$$x^2 + (y \pm C)^2 = C^2 - d^2, \quad (2.10)$$

де  $C$  – постійна інтегрування.

Даний вираз є рівнянням сімейства кіл, що мають радіус  $\sqrt{C^2 - d^2}$ , і центр яких зміщений по осі  $y$  на  $\pm C$ . Різні знаки тут відповідають різним напівплощинам  $\mp y$ . На рис. 2.23 зображено розподіл магнітного поля за допомогою сімейства силових ліній (б) і у вигляді векторного поля (в), розрахованого за виразом (2.8) для дискретного набору точок.

Для розрахунку погонної індуктивності необхідно зв'язати потік вектора магнітної індукції, що створюється у двопровідній лінії з величиною струму. Як поверхню  $S$  для розрахунку потоку

зручно вибрати площину завдовжки  $\Delta l$ , що проходить між провідниками при  $x = 0$  в межах від  $y = -d + a$  до  $y = d - a$ . У цьому перетині магнітне поле має тільки  $x$ -складову, рівну

$$\mathbf{H}_{(x=0)} = \frac{i}{\pi} \frac{\mathbf{e}_x d}{d^2 - y^2}. \quad (2.11)$$

Вибираючи як елемент поверхні інтегрування площадку  $dS = \Delta l dy$ , обчислимо

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{\mu\mu_0 \Delta l i}{\pi} \int_{-d+a}^{d-a} \frac{dy}{y^2 - d^2} = \frac{\mu\mu_0 \Delta l i}{\pi} \ln \frac{2d-a}{a}. \quad (2.12)$$

Коефіцієнт при  $i$  у правій частині для одиничної довжини ( $\Delta l = 1$ ) дорівнює погонній індуктивності двопровідної лінії

$$L_0 = \frac{\mu\mu_0}{\pi} \ln \frac{2d}{a}. \quad (2.13)$$

Тут ми нехтували величиною  $a$  порівняно з  $2d$ , оскільки даний розподіл отриманий з використанням принципу суперпозиції, що передбачає відсутність взаємного впливу магнітних полів на розподіл густини струмів, що можливо тільки в тонких провідниках, якщо  $d \gg a$ .

Отримане рішення можна розповсюдити і на провідники скінченного діаметру, якщо їх контур поєднати з силовою лінією відповідного діаметру, а відстань збільшити відповідно до зсуву їх центру.

**Приклад 2.12. Магнітне поле коаксіальної лінії.** Для коаксіальної двопровідної лінії (рис.2.4,а), до якої підключено навантаження, струм протікає по провідниках у протилежних напрямках. Розподіл поля в просторі між провідниками знаходиться так само і має такий же вигляд, як і для одиночного провідника (приклад 2.10):

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \cdot i/2\pi r. \quad (2.14)$$

За межами внутрішньої області ( $r > R_2$ ) магнітне поле можна розрахувати, передбачаючи, що струм рівномірно розподілений по перетину зовнішнього провідника з густиною  $j = -i/\pi(R_3^2 - R_2^2) = \text{const}$ .

Розв'язок рівняння (2.14) має вигляд  $rH = jr^2/2 + C_3$ , де константу інтегрування  $C_3$  можна знайти з умови  $H(R_2) = i/2\pi R_2$ :

$$C_3 = \frac{i}{2\pi} \left( 1 + \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right).$$

У результаті розподіл напруженості магнітного поля в зовнішньому провіднику може бути описаний виразом

$$\mathbf{H}(r) = \frac{i}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}. \quad (2.15)$$

Результуючий розподіл магнітного поля представлений на рис. 2.24 у вигляді силових ліній (в) і у вигляді радіальної залежності (б). На внутрішній поверхні зовнішнього провідника напруженість дорівнює лінійній густині поверхневого струму  $H(R_2) = i/2\pi R_2$  і спадає углиб провідника. Якщо вважати зовнішній провідник ідеальним, то, як і в прикладі 2.10, в ньому магнітне поле відсутнє. Одним з головних підсумків цього рішення є те, що *магнітне поле не виходить за межі коаксіальної лінії*.

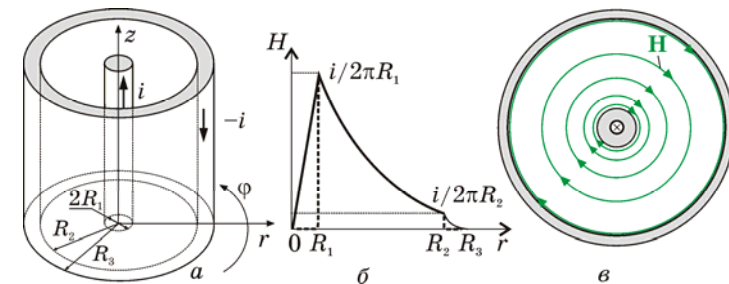


Рис. 2.24. Вибір координатної системи для коаксіальної лінії (а), радіальний розподіл напруженості магнітного поля (б) і розподіл поля у вигляді силових ліній (в). Штрихова лінія (б) – для ідеального провідника

Технічно важливим параметром коаксіальної лінії є *погонна індуктивність*, тобто індуктивність одиничної довжини. Для її розрахунку необхідно обчислити потік вектора магнітної індукції через поверхню, якою виберемо площину, співпадаючу з радіальним перетином довжиною  $\Delta l$  (рис. 2.25). Використання (2.14) приводить до результату

$$\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{\mu\mu_0 i \Delta l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu\mu_0 i \Delta l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (2.16)$$

у якому коефіцієнт пропорційності між струмом і потоком визначає величину індуктивності. Приймаючи  $\Delta l = 1$ , отримаємо вираз для погонної індуктивності

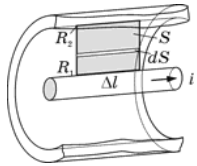


Рис. 2.25. Вибір поверхні інтегрування для розрахунку потоку вектора електричної індукції

$$L_0 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.17)$$

**Приклад 2.13. Магнітне поле тороїдального соленоїда.**

Тороїдальний соленоїд є провідниковою котушкою, намотаною на поверхню тороїда. З  $N$  витків котушки на рис. 2.26 показаний тільки один виток у вигляді лінії струму  $i$ . Щільність

намотування зазвичай характеризують числом витків на одиницю довжини  $n = N/2\pi R_r$ , де  $R_r$  – радіус осової лінії тороїда.

Для розрахунку розподілу магнітного поля у такому соленоїді зручно скористатися першим рівнянням Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (2.18)$$

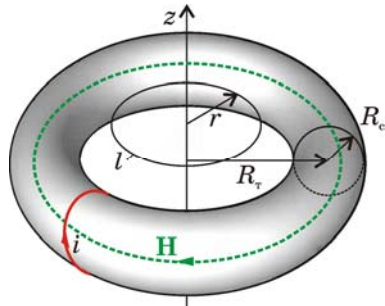


Рис. 2.26. Вибір координатної системи і контура інтегрування для розрахунку магнітного поля в тороїдальному соленоїді де

проходить поза об'ємом соленоїда, лінії струму або не перетинають поверхню  $S$ , або перетинають її двічі у зворотних напрямках. Оскільки сумарний струм при цьому буде нульовим, то можна зробити висновок, що магнітне поле поза соленоїдом буде відсутнє. І лише у тому випадку, коли коло  $l$  проходить усередині об'єму

соленоїда, кожна лінія струму перетинає поверхню інтегрування один раз, забезпечуючи сумарний струм  $i_S = Ni$ . Інтеграл у лівій частині, як і в прикладі 1.1, дорівнює добутку магнітного поля  $H$  на довжину кола інтегрування  $2\pi r$ .

У результаті отримаємо

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \frac{Ni}{2\pi r} = ni \frac{R_r}{r}. \quad (2.19)$$

Магнітне поле усередині тороїдального соленоїда зменшується при віддаленні від осі, але якщо радіус тороїда  $R_r$  помітно перевищує радіус намотування соленоїда  $R_c$ , то це зменшення незначне. Істотна особливість такого соленоїда полягає в тому, що магнітне поле зосереджене тільки усередині соленоїда, а поля розсіяння відсутні.