

3. ПЕРЕМЕННЫЕ ПОЛЯ. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

3.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1.1. Уравнения Максвелла в комплексной форме

Очень часто свойства электронных устройств рассматриваются для гармонических процессов. В тех случаях, когда воздействие не является гармоническим, его представляют как дискретную (ряд Фурье) или непрерывную (интеграл Фурье) сумму гармоник и поведение каждой гармоники изучают независимо. Такое представление возможно, если изучаемое устройство является *линейным*, то есть описывается линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями.

Особенности этого способа связаны с возможностью использования метода комплексных амплитуд, суть которого состоит в следующем. Любая физическая величина, которая изменяется по гармоническому закону $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_0)$, дополняется мнимой частью $A_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ и заменяется в исходных уравнениях ее символическим изображением в виде комплексной величины $\dot{a} = A_m \exp(i\omega t + \varphi_0) = \dot{A} \exp(i\omega t)$. Полученные уравнения решаются только для комплексных амплитуд $\dot{A} = A_m e^{i\varphi_0}$, поскольку временной множитель $\exp(i\omega t)$, который входит во все члены уравнения, сокращается. Для восстановления правильного ответа после решения необходимо от полученного решения оставить только действительную часть. Одно из преимуществ метода комплексных амплитуд при решении дифференциальных уравнений в частных производных состоит в уменьшении количества независимых переменных, так как $\partial \dot{a} / \partial t = i\omega \dot{a}$.

Следовательно, чтобы записать уравнение Максвелла (1.2) в комплексной форме, заменяем все переменные соответствующими комплексными амплитудами, а дифференцирование по времени – умножением на $i\omega$. Если при этом в первом уравнении вместо плотности тока подставить его значение из (1.3), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} &= i\omega \dot{\varepsilon} \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} &= -i\omega \dot{\mu} \mu_0 \dot{\vec{H}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $\dot{\varepsilon} = \varepsilon - i\sigma/\omega\varepsilon_0$. Величина $\dot{\varepsilon}$, которая называется *комплексной диэлектрической проницаемостью*, не имеет в целом

какого-либо физического содержания, а введена ради удобства и симметрии записи уравнений Максвелла. Можно ее записать так:

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon(1 - i\sigma/\omega\varepsilon_0) = \varepsilon(1 - itg\delta). \quad (3.2)$$

Величина $tg\delta$, называемая *тангенсом угла диэлектрических потерь*, по своему физическому содержанию равна отношению тока проводимости в среде к току смещения и является достаточно важным электрическим параметром, значения которого для разных материалов приводятся в справочниках. Значение $tg\delta$ может служить основой для классификации веществ. Так, если $tg\delta \ll 1$, то преобладающими в веществе будут токи смещения, и оно является хорошим диэлектриком. Если $tg\delta \gg 1$, то такое вещество относят к проводникам, так как в нем могут протекать практически только токи проводимости.

Для последующего использования запишем векторные уравнения Максвелла (3.1) в проекциях на оси прямоугольной системы координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= -i\omega \dot{\varepsilon} \varepsilon_0 \dot{E}_x; & \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= i\omega \dot{\mu} \mu_0 \dot{H}_x; \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= -i\omega \dot{\varepsilon} \varepsilon_0 \dot{E}_y; & \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= i\omega \dot{\mu} \mu_0 \dot{H}_y; \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= -i\omega \dot{\varepsilon} \varepsilon_0 \dot{E}_z; & \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= i\omega \dot{\mu} \mu_0 \dot{H}_z; \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для описания гармонических процессов вполне достаточно лишь двух уравнений (3.1) в комплексной форме. Так, если применить оператор div к обеим частям второго из этих уравнений и учесть тождество $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) \equiv 0$, получим четвертое уравнение Максвелла как следствие второго. Аналогично из первого уравнения можно получить, что $\operatorname{div}(\dot{\varepsilon} \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}) \equiv 0$. Это соответствует третьему уравнению Максвелла для среды без пространственного заряда. Может возникнуть вопрос, не противоречит ли это третьему уравнению Максвелла, которое непосредственно для комплексных амплитуд имеет вид

$$\operatorname{div}(\varepsilon \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}) = \dot{\rho},$$

где величина $\dot{\rho}$ является действительной. Если здесь заменить $\dot{\rho}$ из уравнения непрерывности в комплексной форме

$$i\omega\dot{\rho} + \operatorname{div} \dot{\mathbf{j}} = 0 \quad (3.4)$$

но учесть $\dot{\mathbf{j}} = \sigma \dot{\mathbf{E}}$, то получим

$$\operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 + \sigma/i\omega) \dot{\mathbf{E}} = \operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) = 0,$$

где диэлектрическая проводимость является уже комплексной. Следовательно, независимыми из всех четырех уравнений Максвелла (для гармонических полей) являются только первые два.

3.1.2. Граничные условия

Представление уравнений Максвелла в комплексной форме требует соответствующей коррекции комплексной формы записи граничных условий. Сопоставив вид уравнений (1.2) и (3.1), нетрудно догадаться, что комплексную форму записи граничных условий можно получить непосредственно из (1.17), (1.18), (1.21) и (1.28), формально положив в них $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{D}_{1n} &= \dot{D}_{2n}, & \dot{E}_{1\tau} &= \dot{E}_{2\tau}, \\ \dot{B}_{1n} &= \dot{B}_{2n}, & \dot{H}_{1\tau} &= \dot{H}_{2\tau}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нужно только помнить, что вектор $\dot{\mathbf{D}}$ включает комплексную диэлектрическую проницаемость $\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$.

3.1.3. Уравнение баланса энергии

Уравнения баланса энергии в дифференциальной форме (1.11) или в интегральной форме (1.12) записаны для мгновенных значений и не являются линейными относительно амплитуд полей. Поэтому, строго говоря, для них нельзя использовать метод комплексных амплитуд, непосредственно заменяя мгновенные значения их комплексными амплитудами. Действительно, если поля изменяются по гармоническому закону: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_m(\mathbf{r})\cos\omega t$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_m(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi)$, то мгновенные значения вектора Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \cos\omega t \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.6)$$

Используя тождественные тригонометрические преобразования, можно представить

$$\cos\omega t \cos(\omega t + \varphi) = [\cos\varphi (1 + \cos 2\omega t) - \sin\varphi \sin 2\omega t]/2.$$

Это выражение показывает, что в спектре мгновенных значений вектора Пойнтинга присутствует некоторая постоянная составляющая, пропорциональная $\cos\varphi$, и две переменные, изменяющиеся с удвоенной частотой 2ω . Вторая из них, пропорциональная $\sin\varphi$ и отличная от 0, если между изменениями электрического и магнитного поля существует временной фазовый сдвиг, соответствует так называемой *реактивной* мощности. Часть, содержащая $\cos\varphi$ и максимальная при $\varphi = 0$, соответствует *активной* мощности. Она содержит не только колеблющуюся с удвоенной частотой составляющую, но и некоторую постоянную, которая и отвечает за перенос энергии. Ее значение можно получить, если вектор Пойнтинга (3.6) усреднить за период колебаний:

$$\mathbf{\Pi}_{\text{cp}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) dt = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \cos\varphi. \quad (3.7)$$

Все остальные слагаемые обращаются в 0.

Если использовать метод комплексных амплитуд, заменяя $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ на $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, а $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ на $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, где для данного случая $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_m(\mathbf{r})e^{i\varphi}$, то такой же результат можно получить следующим способом. Вводя понятие *комплексного вектора Пойнтинга*

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*], \quad (3.8)$$

легко показать, что его действительная часть соответствует среднему потоку активной мощности

$$\operatorname{Re} \dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Pi}_{\text{cp}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \cos\varphi, \quad (3.9)$$

а мнимая часть

$$\operatorname{Im} \dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Pi}_r = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \sin\varphi \quad (3.10)$$

равна амплитуде колеблющейся реактивной мощности.

Получить из уравнений Максвелла соответствующее уравнение баланса для комплексной мощности можно из уравнений (3.1) подобно тому, как это делалось при выводе (1.11).

Из второго уравнения (3.1), скалярно умноженного на $\dot{\mathbf{H}}^*$, вычтем уравнение, комплексно сопряженное первому и скалярно умноженное на $\dot{\mathbf{E}}$. При этом правую часть первого не объединяем для введения комплексной диэлектрической проницаемости. В результате получим выражение

$$\dot{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = -i\omega \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{H}}^* + i\omega \dot{\mathbf{D}}^* \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{j}}^* \dot{\mathbf{E}}.$$

Левая часть представляет собой $\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] = 2 \operatorname{div} \dot{\mathbf{P}}$, а в правой части $\dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{H}}^* = \mu \mu_0 |\dot{\mathbf{H}}|^2 = 2w_H$ соответствует удвоенной объемной плотности магнитной энергии, $\dot{\mathbf{D}}^* \dot{\mathbf{E}} = \varepsilon \varepsilon_0 |\dot{\mathbf{E}}|^2 = 2w_E$ – удвоенной объемной плотности электрической энергии, $\dot{\mathbf{j}}^* \dot{\mathbf{E}} = \sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2$ – усредненной за период удвоенной плотности мощности потерь на нагревание. В итоге уравнение баланса энергии в комплексной форме можно представить в виде

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{P}} + i\omega(w_H - w_E) + \dot{\mathbf{j}}^* \dot{\mathbf{E}}/2 = 0. \quad (3.11)$$

Для перехода к интегральной форме умножим все слагаемые (3.11) на dV и проинтегрируем по объему V . Используя теорему Остроградского-Гаусса для замены интеграла по объему от дивергенции вектора Пойнтинга на интеграл по замкнутой поверхности S , окружающей этот объем, получим

$$\oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + i\omega \int_V (w_H - w_E) dV + \int_V \dot{\mathbf{j}}^* \dot{\mathbf{E}} dV = 0. \quad (3.12)$$

Как уже отмечалось в разд. 1.4, для упрощения анализа баланса энергии, связанной с различными видами ее преобразования, часто используют понятие *сторонних источников*. Учесть их влияние можно, вводя в третье слагаемое $\dot{\mathbf{j}}_{\text{ст}}$, либо $\dot{\mathbf{E}}_{\text{ст}}$ в зависимости от модели источника. Но формально проще всего в правой части (3.12) поставить комплексную мощность сторонних источников $\dot{P}_{\text{ст}}$.

Смысл входящих в уравнение баланса слагаемых проще понять, если (3.12) представить отдельно для действительных и мнимых частей

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + \frac{\sigma}{2} \int_V |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV = \operatorname{Re} \dot{P}_{\text{ст}}, \quad (3.13)$$

$$\operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + \omega \int_V (w_H - w_E) dV = \operatorname{Im} \dot{P}_{\text{ст}}. \quad (3.14)$$

Эти выражения представляют собой уравнения баланса для средней за период активной и амплитуды колебаний реактивной мощности. Если, например, источник находится внутри рассматриваемого объема, то его активная мощность расходуется на нагревание проводящей среды, и (или) на создание потока вектора Пойнтинга наружу. Если потери на нагревание отсутствуют, то вся мощность источника идет на излучение. Реактивная мощность источника также может выходить из объема (первое слагаемое в 3.14) и запасаться в виде энергии полей (второе слагаемое). Если в объеме отсутствует источник, то потери на нагревание определяют различие входящего и выходящего потоков активной мощности. В энергетически изолированном объеме при отсутствии источника и потерь поля могут существовать, их реактивная энергия колеблется с удвоенной частотой. Разные знаки перед w_E и w_H показывают, что запасенная реактивная энергия переходит из энергии электрического поля в энергию магнитного и наоборот.

3.2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ.

3.2.1. Волновые уравнения – следствия уравнений Максвелла

Заслуга Максвелла заключалась в том, что им было введено понятие тока смещения, которое позволило объединить ранее независимые соотношения теории электромагнетизма в единую систему уравнений – уравнения Максвелла. Последствия этого можно представить, рассматривая структуру первых двух уравнений (3.2). Допустим, что током проводимости, который протекает в некоторой среде, возбуждается вихревое магнитное поле (в соответствии с первым уравнением 1.2,а). Если ток изменяется во времени, так же изменяется и магнитное поле, которое возбуждает (в соответствии со вторым уравнением 1.2,б) вихревое электрическое поле. Но переменное электрическое поле вызывает ток смещения, который, как и ток проводимости, в свою очередь приводит к возбуждению вихревого магнитного поля. Таким образом, процесс взаимного возбуждения полей, начавшись, может продолжаться как угодно долго во времени и передаваться в

пространстве. Подобные процессы называют волновыми. Для более глубокого понимания сути и свойств волн сделаем некоторые формальные превращения. Рассматривая пока для упрощения среду без свободных зарядов ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$), подействуем оператором rot на оба уравнения Максвелла:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = \varepsilon\varepsilon_0\partial(\text{rot } \mathbf{E})/\partial t; \quad \text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = -\mu\mu_0\partial(\text{rot } \mathbf{H})/\partial t.$$

Подставляя в правую часть $\text{rot } \mathbf{E}$ и $\text{rot } \mathbf{H}$ из первых двух уравнений Максвелла и учитывая тождество $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \text{graddiv}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$, в котором нужно принять $\text{div}\mathbf{A} = 0$ в соответствии с третьим и четвертым уравнениями Максвелла, получаем разделение системы на два независимых уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2 &= 0; \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \partial^2 \mathbf{H}/\partial t^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Уравнения такого типа в математической физике называют волновыми. Представление о том, что такое волна, можно получить, рассматривая для упрощения одномерное волновое уравнение для некоторой скалярной функции $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.16)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение этого уравнения имеет вид

$$u(x, t) = C^+ f(x - vt) + C^- f(x + vt), \quad (3.17)$$

где конкретный вид функции f не имеет значения, она только должна быть дважды дифференцируемой. Определяющей здесь является структура аргумента, куда входят координата и время в виде линейной комбинации.

Функции типа $f(x \pm vt)$, точнее любые функции аргумента $(x \pm vt)$, математически описывают такие процессы, которые называют волнами. Чтобы представить характер этих функций, вспомним, что функция $f(x - a)$ повторяет вид функции $f(x)$, но сдвинута вправо на величину a . На рис. 3.1 изображены две «фотографии» некоторой функции $f(x - vt)$, сделанные через промежуток времени Δt . Они отличаются лишь тем, что все точки второй кривой сдвинуты в сторону больших значений x на

величину $\Delta x = v\Delta t$. Поэтому со временем вся функция смещается вправо со скоростью $v = \Delta x/\Delta t$. Для гармонических волновых процессов, когда может быть введено понятие фазы, эта скорость называется *фазовой*. Легко представить, что функция $f(x + vt)$ описывает процесс, который распространяется со скоростью v в направлении, обратном относительно оси x . Следовательно слагаемые в выражении (3.17) – это *прямая* и *обратная* волны. Если рассматривать распространение волн по отношению к источнику их возбуждения, то обычно употребляют термины «падающая» и «отраженная» волна.

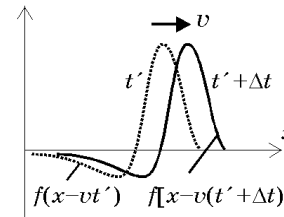


Рис. 3.1. Запаздывание функции $f(x - vt)$ обусловлено структурой аргумента

Физическая природа такой структуры аргумента $(ax + bt)$, включающего линейную комбинацию координаты и времени, связана с конечной скоростью распространения и, соответственно, с *запаздыванием*. Действительно, если в точке $x = 0$ сформирована какая-то временная функция $f(t)$, то в точке на расстоянии x она будет по форме такой же $f(t)$, но сдвинутой во времени: $t' = t - \Delta t$. Так как запаздывание $\Delta t = x/v$ определяется расстоянием и скоростью распространения, то в аргументе волновых функций появляется координата, пропорциональная запаздыванию.

Выражения (3.17) описывают так называемые незатухающие волны. Если волна затухает или возрастает в пространстве, вместо постоянных интегрирования C^\pm используют соответствующие координатные функции, которые характеризуют закон изменения. Такая ситуация наблюдается, как мы увидим дальше, например, в среде с конечным значением удельной электропроводности.

3.2.2. Гармонические волны. Основные параметры

В электронной технике часто имеют дело с гармоническими волновыми процессами, которые описывают волновыми функциями аргумента $\omega(t \pm x/v_\phi) = \omega t \pm kx$, который называют *фазой волны*, включающей временную ωt и пространственную kx части:

$$u(x, t) = C^+ \frac{\sin}{\cos}(\omega t - kx + \phi_0^+) + C^- \frac{\sin}{\cos}(\omega t + kx + \phi_0^-). \quad (3.18)$$

Двойная запись здесь означает, что можно выбирать любую из функций. В зависимости от этого будут те или иные значения начальных фаз ϕ_0^\pm для падающей и отраженной волны.

Характерные параметры гармонических волн:

ω – круговая частота временных колебаний, показывающая изменение фазы за единицу времени;

$k = \omega/v_\phi$ – фазовая постоянная распространения или волновое число, характеризующее изменение фазы волны на единице длины;

v_ϕ – фазовая скорость, т.е. скорость распространения точек с данной фазой. Если ввести понятие *фронта волны*, как совокупности точек с одинаковой фазой, то скорость перемещения фронта будет определяться фазовой скоростью.

Параметры волны ω и k связаны с *временным периодом* T и *пространственным периодом* λ (длина волны) однотипными соотношениями $\omega = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$. Надо заметить, что волна есть периодическая функция двух независимых аргументов – координаты и времени. В этом случае необходимо говорить и о двух *независимых периодах* – пространственном (λ) и временном (T). Однако, для большинства реальных физических процессов между ними обычно существует некоторая внутренняя связь, которая вызвана наличием *дисперсии*, проявляющейся в зависимости фазовой скорости от частоты $v_\phi(\omega)$.

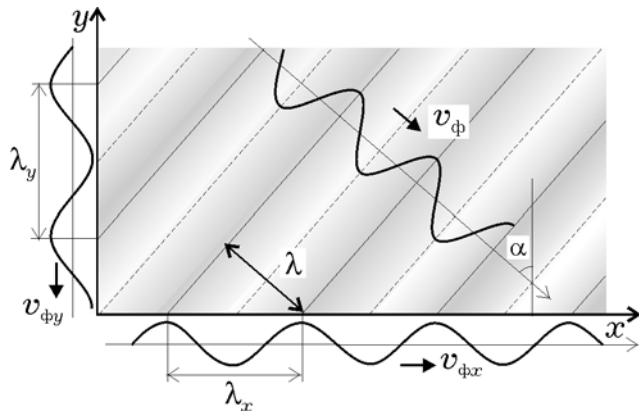


Рис. 3.2. При наклонном падении волны относительно какого-либо направления длина волны и фазовая скорость больше соответствующих значений в свободном пространстве (вдоль направления распространения)

В случаях, когда направление распространения не совпадает ни с одной из координатных осей (рис. 3.2), волновые функции имеют аргумент $\omega t \pm \mathbf{k}\mathbf{r}$. Здесь $\mathbf{k} = \mathbf{e}_x k_x + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z k_z$ – волновой вектор, который имеет длину, равную волновому числу, и направление, совпадающее с направлением распространения волны или с вектором фазовой скорости; \mathbf{r} – радиус-вектор. Поскольку $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, можно ввести понятие волновых чисел вдоль координатных осей, равных проекциям вектора \mathbf{k} на эти оси. Им отвечают длины волн $\lambda_{x,y,z} = 2\pi/k_{x,y,z}$, отсчитываемые вдоль направлений координатных осей. Это схематически изображено на рис. 3.2, где сплошными линиями показаны «гребни» волн, а штриховыми «впадины». Ясно, что длина волны в любом из направлений не меньше длины волны, отсчитываемой вдоль направления распространения. Аналогично можно ввести понятие фазовой скорости вдоль того или иного направления: $v_{\phi i} = \omega/k_i$, ($i = x, y, z$), причем эта скорость *никогда не меньше* фазовой скорости вдоль направления распространения волны. В частном случае, когда волна распространяется перпендикулярно к какому-либо направлению, фазовая скорость и длина волны вдоль него бесконечно большие.

3.2.3. Групповая скорость

Понятие групповой скорости обычно связывают со скоростью перемещения в пространстве максимума «огibaющей» так называемого «волнового пакета» (рис. 3.3), с помощью которого передается некоторый сигнал. Все сигналы могут быть представлены либо дискретной (ряд Фурье), либо непрерывной (интеграл Фурье) суммой простых гармонических составляющих. По целому ряду причин при распространении электромагнитных волн наблюдается явление дисперсии, из-за чего фазовая скорость отдельных частотных составляющих будет различна. Это приведет к тому, что форма пакета будет изменяться при его перемещении в пространстве, и различные точки огibaющей будут перемещаться с разной скоростью.

Для более корректного определения групповой скорости рассмотрим простейший «волновой пакет», состоящий из двух гармонических волновых процессов с близкими значениями частоты и волнового числа, отстоящими от некоторого среднего значения на $\Delta\omega$ и Δk соответственно:

$$a(x, t) = A_{m1} \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x] + A_{m2} \cos[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x].$$

Простыми тригонометрическими преобразованиями такой пакет можно представить (для упрощения примем амплитуды равными) в виде:

$$a(x, t) = 2A_m \cos(\Delta\omega t - \Delta kx) \cos(\omega t - kx). \quad (3.19)$$

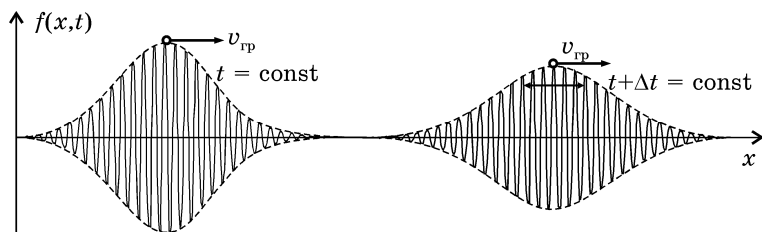


Рис. 3.3. Групповая скорость определяется скоростью смещения функции, огибающей «волновой пакет»

Такой процесс, подобный «биению» двух гармонических колебаний, можно представить (рис. 3.4) как некоторую волну с волновым множителем $\cos(\omega t - kx)$, т.е. со средними параметрами ω и k . Косинус, стоящий при амплитуде, можно рассматривать как функцию, соответствующую огибающей данного волнового пакета. Но эта огибающая также представляет собой волновой процесс с параметрами $\Delta\omega$ и Δk , который перемещается со временем в пространстве со скоростью $\Delta\omega/\Delta k$. Эта величина и принимается в качестве скорости «пакета», то есть групповой скорости.

Можно показать, что для более сложных сигналов, которые

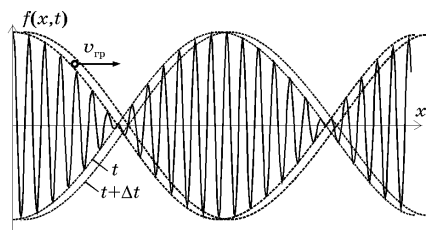


Рис. 3.4. Огибающая группы из двух гармонических волн представляет собой волну с параметрами $\Delta\omega$ и Δk

Для нахождения групповой скорости необходимо знать закон дисперсии, который представляется как зависимость между ω и k , либо в виде зависимости фазовой скорости от частоты.

представляются как непрерывная сумма гармонических (интеграл Фурье), групповая скорость определяется отношением бесконечно малых приращений $d\omega$ и dk , или производной

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.20)$$

3.3. ПЛОСКАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

3.3.1. Решение волновых уравнений

Возвращаясь к электромагнитным волнам, нужно отметить, что в соответствии с уравнением (3.15) векторы электрического и магнитного полей будут распространяться в виде незатухающих волн (для среды без свободных зарядов) со скоростью $v = 1/\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$, которая зависит от параметров среды.

Если проделать процедуру, аналогичную выводу уравнений (3.15), но с уравнениями Максвелла в комплексной форме, то для комплексных амплитуд векторов электрического и магнитного поля получим:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \dot{\gamma}^2 \mathbf{E} = 0; \quad \nabla^2 \mathbf{H} + \dot{\gamma}^2 \mathbf{H} = 0, \quad (3.21)$$

Эти уравнения по форме совпадают с (3.15), если в последних принять $\partial/\partial t = i\omega$, $\partial^2/\partial t^2 = -\omega^2$, но нужно обратить внимание на то, что принятое при выводе (3.15) упрощение об отсутствии свободных зарядов здесь не имеет места, так как потери в среде учитываются в комплексной диэлектрической проницаемости. Величина

$$\dot{\gamma} = \omega\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} = k - i\alpha, \quad (3.22)$$

которая введена как обозначение, называется *комплексной постоянной распространения* электромагнитной волны. Действительная ее часть – волновое число, а мнимая характеризует затухание волны.

В качестве самой простой модели электромагнитного волнового процесса рассмотрим *плоскую* волну, распространяющуюся в однородной среде. Такое название связано с формой *фронта волны*, то есть поверхности, все точки которой имеют одинаковую фазу. Эта модель полезна для понимания общих свойств и параметров электромагнитных волн, несмотря на то, что она является идеализацией реальных волн. Действительно, обычно электромагнитные волны ближе к сферическим (рис. 3.5), радиально расходящимся от источника возбуждения. Но с достаточной точностью вдали от источника и для ограниченной области пространства можно считать фронт волны плоским и принять $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$. Для количественного анализа выберем

направление оси z , совпадающее с направлением распространения волны или с направлением вектора Пойнтинга. Поскольку $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$, то $E_z = H_z = 0$ и векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} лежат в поперечной плоскости. Ограничивая рассмотрение гармоническими процессами, воспользуемся уравнениями Максвелла в комплексной форме для проекций на координатные оси (3.3):

$$\begin{cases} dH_y / dz = -i\omega\epsilon\epsilon_0 E_x, \\ dE_x / dz = -i\omega\mu\mu_0 H_y, \end{cases} \begin{cases} dH_x / dz = i\omega\epsilon\epsilon_0 E_y, \\ dE_y / dz = i\omega\mu\mu_0 H_x. \end{cases} \quad (3.23)$$

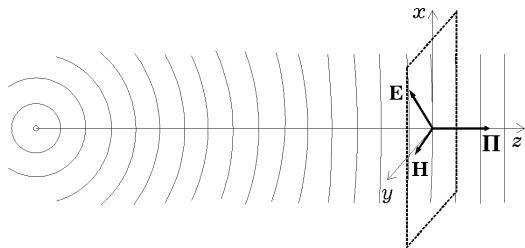


Рис. 3.5. На значительном удалении от источника и в ограниченной области пространства фронт волны можно считать плоским

Как видим, уравнения разделяются на две независимые системы: одна – для проекций E_x и H_y , вторая – для E_y и H_x . Это означает, во-первых, что их решение можно рассматривать независимо друг от друга; во-вторых, выбирая направление оси x , совпадающим с направлением силовых линий электрического поля ($E_x = E$, $E_y = 0$), автоматически получаем нулевое решение для второй системы ($H_x = 0$, $H_y = H$). Поэтому

$$\begin{cases} dH / dz = -i\omega\epsilon\epsilon_0 E, \\ dE / dz = -i\omega\mu\mu_0 H. \end{cases} \quad (3.24)$$

Принятое предположение о постоянстве направления вектора \mathbf{E} ограничивает рассмотрение случаем так называемой линейно поляризованной волны. Можно точно доказать, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} всегда перпендикулярны друг к другу независимо от типа волны.

Для решения последней системы уравнений необходимо разделить переменные. Это достигается дифференцированием каждого уравнения и подстановкой вместо первых производных их

значений из (3.24). С учетом обозначения (3.22) получим уравнения

$$d^2 E / dz^2 + \gamma^2 E = 0, \quad d^2 H / dz^2 + \gamma^2 H = 0,$$

тождественные волновым уравнением (3.21) для одномерного случая ($\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$). Их решения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} + \dot{E}^- e^{i\dot{\gamma}z} \\ \dot{H} &= \dot{H}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} - \dot{H}^- e^{i\dot{\gamma}z}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь E^\pm и H^\pm – постоянные интегрирования, которые играют роль комплексных амплитуд волн. Их количество увеличилось до четырех в результате повторного дифференцирования и повышения порядка исходных уравнений. Для уменьшения их количества подставим (3.25) в одно из уравнений (3.24) и, учитывая равенство коэффициентов при одинаковых функциях, получим:

$$\frac{\dot{E}^+}{\dot{H}^+} = \frac{\dot{E}^-}{\dot{H}^-} = \frac{\dot{\gamma}}{\omega\epsilon\epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} = Z_c. \quad (3.26)$$

Эта величина, которая равна отношению амплитуды электрического поля к амплитуде магнитного поля для каждой из волн, называется волновым сопротивлением среды. Для вакуума $Z_c = 120\pi \approx 377$ Ом. Используя (3.26), можно записать:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} + \dot{E}^- e^{i\dot{\gamma}z}, \\ \dot{H} &= (\dot{E}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} - \dot{E}^- e^{i\dot{\gamma}z}) / Z_c. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Если учесть, что $\dot{\gamma}$ – величина комплексная, и подставив (3.22) в выражение (3.27), получим

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+ e^{-\alpha z} e^{-ikz} + \dot{E}^- e^{\alpha z} e^{ikz}, \\ \dot{H} &= (\dot{E}^+ e^{-\alpha z} e^{-ikz} - \dot{E}^- e^{\alpha z} e^{ikz}) / Z_c. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Для восстановления мгновенных действительных значений необходимо выражение для комплексных амплитуд (3.28) умножить на $e^{i\omega t}$ и взять действительную часть. В результате для электрического поля (аналогично для магнитного) получим

$$E = \operatorname{Re}(\dot{E} e^{i\omega t}) = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz + \varphi_0^+) + E_m^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + kz + \varphi_0^-). \quad (3.29)$$

Здесь φ_0^+ и φ_0^- – начальные фазы, которые зависят от выбора начала отсчета времени и (или) координаты.

Графики этих функций для двух фиксированных моментов времени, отличающихся на Δt , это гармонические функции (рис. 3.6), амплитуды которых изменяются вдоль координаты x по экспоненциальному закону. Амплитуда падающей волны уменьшается (рис. 3.6, а) и возрастает для отраженной (рис. 3.6, б), то есть волны затухают вдоль направления их распространения. Величина α определяет скорость затухания и называется коэффициентом затухания.

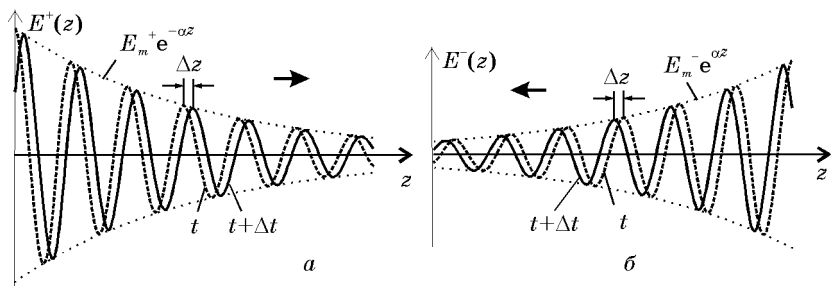


Рис. 3.6. Мгновенные значения прямой (а) и обратной (б) волны для фиксированных моментов времени. Амплитуды волн затухают в направлении их распространения

Естественно, что в неограниченной однородной среде волна может распространяться только от источника возбуждения. Формально это достигается выбором постоянной интегрирования $E_m^- = 0$. Кроме того, выбором начала отсчета всегда можно получить начальную фазу $\varphi_0^+ = 0$. Поэтому для однородной и бесконечной среды

$$E = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz) \\ H = (E_m^+ / |Z_c|) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz - \varphi_z);$$

где $|Z_c|$ и φ_z – соответственно модуль и фаза комплексного значения волнового сопротивления среды.

Для среды без потерь ($\operatorname{tg} \delta = 0$) волновое сопротивление – величина действительная и векторы E и H изменяются во времени и пространстве синфазно (рис. 3.7). В среде с потерями изменения H отстают по фазе от E тем больше, чем больше потери.

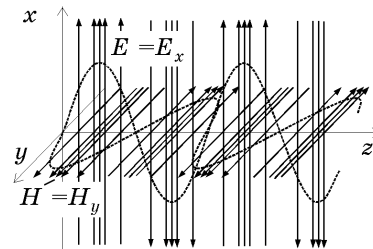


Рис. 3.7. Пространственное распределение электрического и магнитного полей для плоской волны. Значения напряженности поля пропорциональны плотности силовых линий

3.3.2. Поляризация электромагнитных волн

Поляризация электромагнитной волны – ее свойство, связанное с пространственной ориентацией векторов поля. Обычно в качестве направления поляризации выбирают ориентацию вектора электрического поля.

При рассмотрении модели плоской электромагнитной волны в предыдущем разделе мы выбрали направление оси x вдоль вектора электрического поля, предполагая, что его ориентация не изменяется в пространстве, и он всегда расположен в плоскости xOz . Эта ситуация соответствует *линейной* поляризации, а если ось x применительно к естественному пространству направлена вертикально, то говорят о *вертикальной* поляризации (рис. 3.8, а).

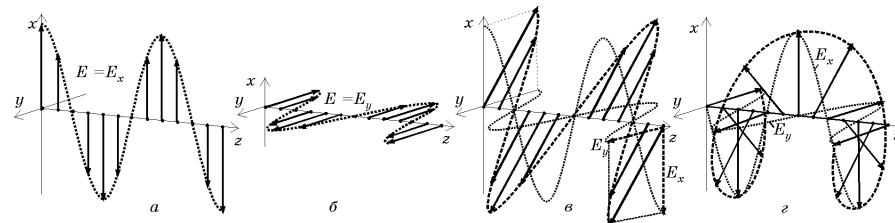


Рис. 3.8. Ориентация векторов электрического поля для вертикальной (а), горизонтальной (б), наклонной (в) и круговой (г) поляризаций. Значения напряженности поля пропорциональны длине векторов

Если направление вектора E связать с осью y , то будет обнуляться первая система уравнение из (3.23), и мы получим аналогичные (3.23) решения второй системы, но вектор электрического поля будет расположен в плоскости yOz . Это соответствует *горизонтальной* поляризации (рис. 3.8, б).

Однако такой выбор возможен только при сохранении пространственной ориентации векторов поля, что наблюдается далеко не всегда. Системы уравнений являются независимыми и

общее решение для неограниченной непоглощающей среды должно иметь вид суммы бегущих волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_{0x}) + \mathbf{e}_y E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_{0y}). \quad (3.30)$$

Естественно, что параметры волны ω и k должны быть одинаковыми для обеих проекций, а амплитуды и начальные фазы могут различаться. Если, например, фазы одинаковы, то ориентация вектора \mathbf{E} в пространстве будет сохраняться при распространении и волна будет также линейно поляризованной, но под некоторым углом к осям x и y (рис. 3.8, в). Величина этого угла зависит от соотношения между амплитудами проекций вектора электрического поля.

При различных начальных фазах ориентация вектора электрического поля не сохраняется. Например, при фазовом сдвиге между амплитудами на $\pm\pi/2$ и равных амплитудах (рис. 3.8, г) длина вектора \mathbf{E} остается неизменной, а его конец в пространстве будет описывать спираль постоянного радиуса, а в фиксированной точке пространства – окружность. Это соответствует *круговой* поляризации, которая в зависимости от знака фазового сдвига и соответственно от направления вращения может быть *правой круговой* или *левой круговой* поляризацией. При других фазовых сдвигах и различных амплитудах E_{mx} и E_{my} можно получить *эллиптически поляризованную* волну.

3.3.3. Параметры волны в разных средах.

Рассмотрим, как изменяются основные параметры волны, возбужденной на какой-то частоте ω , в зависимости от свойств среды. Сначала сделаем некоторые подготовительные преобразования. В соответствии с (3.22) и (3.2)

$$\gamma = k - i\alpha = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon \mu (1 - i \operatorname{tg} \delta)}.$$

Для удобства разделения γ на действительную и мнимую части примем во внимание, что

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}|^2 &= k^2 + \alpha^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon \mu \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}, \\ \operatorname{Re}(\dot{\gamma}^2) &= k^2 - \alpha^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon \mu. \end{aligned}$$

Отсюда, складывая эти выражения, а затем их вычитая, легко получить

$$\begin{aligned} k &= (\omega/c) \sqrt{\varepsilon \mu (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1) / 2}, \\ \alpha &= (\omega/c) \sqrt{\varepsilon \mu (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1) / 2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Выражение для комплексного волнового сопротивления в общем случае можно представить в форме

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}}} e^{i\delta/2}. \quad (3.32)$$

Проанализируем параметры волны для четырех самых простейших, но достаточно характерных в инженерной практике случаев.

1. *Вакуум* ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta = 0$). Непосредственно из (3.31) получаем, что в вакууме затухание электромагнитной волны отсутствует ($\alpha = 0$), волна распространяется со скоростью $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ и имеет длину волны $\lambda_0 = 2\pi/k = 2\pi c/\omega = c/f$. Кроме того, волновое сопротивление вакуума $Z_{c0} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ Ом – величина действительная, и векторы электрического и магнитного полей изменяются синфазно.

3. *Идеальный диэлектрик* ($\varepsilon > 1$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta = 0$). Отличие от предыдущего случая состоит в том, что здесь скорость распространения, длина волны и волновое сопротивление уменьшаются в $\sqrt{\varepsilon}$ раз:

$$c_\varepsilon = c/\sqrt{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon}, Z_{c\varepsilon} = Z_{c0}/\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.33)$$

3. *Диэлектрик с малыми потерями* ($\varepsilon > 1$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta \ll 1$). Пренебрегая в выражении (3.31) для k величиной $\operatorname{tg}^2 \delta$, получаем, что скорость и длина волны остаются такими же, как и в идеальном диэлектрике. Такое приближение нельзя сделать в выражении для α . Воспользуемся приближенной формулой $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \approx 1 + \operatorname{tg}^2 \delta/2$ и получим

$$\alpha \approx \omega \operatorname{tg} \delta / 2c_\varepsilon = \pi \operatorname{tg} \delta / \lambda_\varepsilon = \sigma Z_{c\varepsilon} / 2, \quad (3.34)$$

то есть коэффициент затухания прямо пропорционален удельной электрической проводимости среды.

При прохождении расстояния l амплитуда волны уменьшается в $e^{\alpha l}$ раз, а ее энергия в $\beta = e^{2\alpha l}$. Обычно затухание выражают в децибелах, которые определяются следующим образом:

$$\beta \text{ (дБ)} = 10 \lg \beta = 10 \lg (e^{2\alpha l}) \approx 8,686 \alpha l. \quad (3.35)$$

Из (3.32) при малых потерях можно считать, что $|\dot{Z}_{ce}| = Z_{ce} = Z_{c0}/\sqrt{\varepsilon}$, а $\varphi_Z = \delta/2$, то есть изменения магнитного поля опаздывают по фазе на $\delta/2$ относительно изменений электрического.

4. *Проводящая среда*, в которой токи проводимости преобладают над токами смещения ($\text{tg} \delta \gg 1$). В этом случае, как следует из (3.31), при $\text{tg} \delta \gg 1$ можно пренебречь разницей между фазовой постоянной и постоянной затухания:

$$k \approx \alpha \approx (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu} \text{tg} \delta/2 = \sqrt{\omega\mu\mu_0\sigma/2}. \quad (3.36)$$

Волновое сопротивление такой среды является комплексной величиной, а так как при $\text{tg} \delta \gg 1$, $\delta \approx \pi/2$, $\exp(i\delta/2) \approx (1+i)/\sqrt{2}$, то из (3.32)

$$\dot{Z}_c = (1+i)\sqrt{\omega\mu\mu_0/2\sigma}. \quad (3.37)$$

Полученные результаты позволяют сделать ряд практически важных выводов.

Во-первых, из равенства $k \approx \alpha$ следует, что поглощение волны происходит на расстояниях порядка длины волны. Более точно глубину поглощения принято оценивать величиной

$$\Delta = 1/\alpha = \sqrt{2/\omega\mu\mu_0\sigma} = 1/\sigma \text{Re}(\dot{Z}_c). \quad (3.38)$$

В действительности на расстоянии Δ происходит ослабление амплитуды в $e \approx 2,71$ раз. Считается, что практически полное поглощение волны происходит на расстояниях (3...5) Δ . При этом изменение фазы волны составляет (3...5) радиан.

Этот же результат означает, что электромагнитное поле у поверхности проводника проникает в него на глубину порядка Δ . Соответственно и токи проводимости протекают лишь в приповерхностном слое. Указанное явление называется *поверхностным эффектом* (*скин-эффектом*). Толщина поверхностного слоя уменьшается с ростом частоты, потому этот эффект заметен прежде всего на высоких частотах, например, для

меди $\Delta(\text{мкм}) \approx 66/\sqrt{f(\text{МГц})}$ и на частоте 1000 МГц $\Delta \approx 2$ мкм. Для идеального проводника $\sigma \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$ и электромагнитное поле внутри него отсутствует.

Второй важный вывод следует из (3.37). При распространении волны в проводнике изменения магнитного поля отстают по фазе от изменений электрического поля. В идеальном проводнике $\Delta\varphi \rightarrow \pi/4$, а волновое сопротивление $Z_c \rightarrow 0$.

Третий важный вывод состоит в том, что наличие потерь в среде приводит к зависимости фазовой скорости волны от частоты:

$$v_{\phi} = \omega/k \sim \sqrt{\omega}.$$

Это явление называется *дисперсией*, а функция $v_{\phi}(\omega)$ – *законом дисперсии*. Часто в теории волновых процессов закон дисперсии представляют как зависимость $k(\omega)$, причем отсутствие дисперсии отвечает линейной зависимости, а характер дисперсии определяется отклонением $k(\omega)$ от прямой. Причиной дисперсии могут быть не только потери в среде распространения, но и конфигурация линий передачи электромагнитных волн.

3.4. ВОЛНЫ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ

На низких частотах нет особых проблем объединения электронных компонентов в цепи с помощью обычных проводников. Однако на высоких частотах, когда *длина проводников становится соизмеримой с длиной волны сигнала*, из-за запаздывания, вызванного конечностью времени распространения электромагнитного возбуждения, потенциал в разных точках вдоль проводника будет разным. В этих условиях становятся неверными законы Ома и Кирхгофа, на которых основана теория цепей, и точный анализ процессов здесь возможен только на основе теории поля. Однако, целесообразным может быть волновой подход, который лежит в основе теории распространения *волн тока и напряжения* вдоль линии передачи.

3.4.1. Телеграфные уравнения

В однородной двухпроводной линии (рис. 3.8), где наблюдается существенное запаздывание распространения сигнала, напряжение и ток являются функциями координат и времени, поэтому

$$dV(x, t) = (\partial V/\partial x)dx + (\partial V/\partial t)dt,$$

$$di(x, t) = (\partial i/\partial x)dx + (\partial i/\partial t)dt.$$

Для анализа процессов, возникающих при передаче сигнала вдоль линии из-за его запаздывания, необходимо знать скорость его распространения, которая определяется параметрами линии.

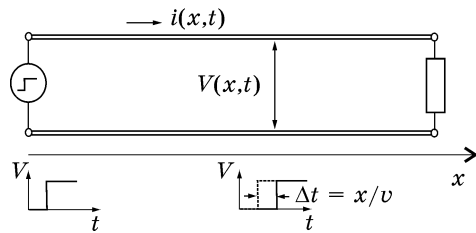


Рис. 3.8. Конечная скорость распространения вызывает запаздывание сигнала, из-за чего ток и напряжение становятся функциями координат.

Неидеальность изоляции порождает токи утечки между проводами, которые зависят от проводимости диэлектрика. И наконец, переменное электрическое поле между проводами вызывает протекание тока смещения, что моделируется емкостью между проводами. Эти параметры равномерно (для однородных линий) распределены вдоль всей длины проводов, поэтому устройства, которые включают отрезки длинных линий, называют *цепями с распределенными параметрами*. Для линий передачи удобно задавать четверку так называемых *погонных* (в расчете на единицу длины) параметров: погонное сопротивление r_0 [Ом/м], погонную индуктивность L_0 [Гн/м], погонную проводимость g_0 [См/м] и погонную емкость C_0 [Ф/м]. С помощью этих параметров и моделируют омическое сопротивление и индуктивные свойства проводников, а также токи утечки и токи смещения в диэлектрической среде между проводниками линии.

Для составления основных уравнений, которые описывают динамику изменения тока и напряжения вдоль линии, рассмотрим дифференциальный отрезок линии длиной dx с известными погонными параметрами. Для этого отрезка линии из-за его малой длины вполне пригодна схемная модель с *сосредоточенными* параметрами (рис. 3.9, а).

Естественно, что изменение напряжения $(\partial V/\partial x)dx$ между проводниками в данный момент времени определяется падением напряжения на омическом (ir_0dx) и индуктивном $(L_0(\partial i/\partial t)dx)$ сопротивлениях проводников. Аналогично, изменение тока в проводе $(\partial i/\partial x)dx$ на участке dx происходит по счет тока утечки Vg_0dx и тока смещения $C_0(\partial V/\partial t)dx$. Отсюда, при сокращении на dx всех слагаемых, получим

$$\begin{aligned} \partial V/\partial x &= -r_0 i - L_0(\partial i/\partial t); \\ \partial i/\partial x &= -g_0 V - C_0(\partial V/\partial t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

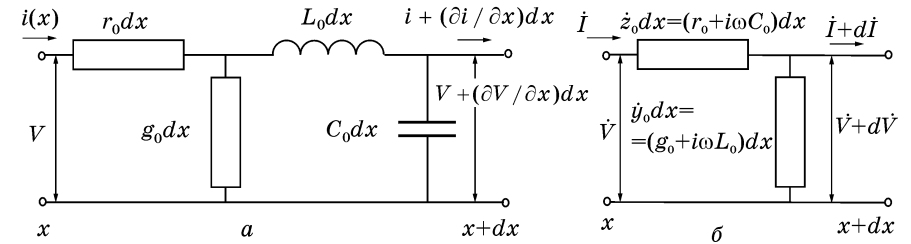


Рис. 3.9. Схемная модель дифференциального участка длинной линии может быть представлена через сосредоточенные параметры в действительной (а) и комплексной форме (б).

Полученные дифференциальные уравнения в частных производных называют *телеграфными*, так как с их помощью был проведен анализ распространения телеграфных сигналов на большие расстояния.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только гармонических процессов $\dot{V}(x)e^{i\omega t}$ и $\dot{I}(x)e^{i\omega t}$. В этом случае модель элементарного участка может быть изображена (рис. 3.9, б) с помощью сосредоточенных компонентов $z_0 = r_0 + i\omega L_0$ и $y_0 = g_0 + i\omega C_0$, а телеграфные уравнения при использовании метода комплексных амплитуд принимают вид:

$$\begin{cases} d\dot{V}/dx = -z_0 \dot{I}, \\ d\dot{I}/dx = -y_0 \dot{V}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Разделить эту систему на независимые уравнения можно повторным дифференцированием и перекрестной подстановкой первых производных из (3.40):

$$d^2 \dot{V}/dx^2 = \gamma^2 \dot{V}; \quad d^2 \dot{I}/dx^2 = \gamma^2 \dot{I}. \quad (3.41)$$

Здесь введено обозначение

$$\sqrt{z_0 y_0} = \sqrt{(r_0 + i\omega L_0)(g_0 + i\omega C_0)} \equiv \gamma = \alpha + ik, \quad (3.42)$$

где величина $\dot{\gamma}$ называется комплексной *постоянной распространения*. Решение уравнений (3.41) можно представить в виде суммы двух слагаемых, которые описывают прямые (падающие) и обратные (отраженные) волны тока и напряжения:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}^+ e^{-\dot{\gamma}x} + \dot{V}^- e^{\dot{\gamma}x}; \\ \dot{I} &= \dot{I}^+ e^{-\dot{\gamma}x} - \dot{I}^- e^{\dot{\gamma}x}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Здесь \dot{V}^+ , \dot{V}^- , \dot{I}^+ и \dot{I}^- – постоянные интегрирования, имеющие смысл комплексных амплитуд соответствующих волн. Уменьшить их количество можно, если подставить решение (3.43) в исходные уравнения (3.40) и приравнять коэффициенты при одинаковых функциях. В результате получим связь между комплексными амплитудами тока и напряжения для волн одинакового направления:

$$\frac{\dot{V}^+}{\dot{I}^+} = \frac{\dot{V}^-}{\dot{I}^-} = \sqrt{\frac{r_0 + i\omega L_0}{g_0 + i\omega C_0}} \equiv Z_0, \quad (3.44)$$

где величину Z_0 называют *волновым сопротивлением линии*.

Следует обратить внимание, что это отношение одинаково для волн, как падающих, так и отраженных, и определяется только погонными параметрами линии. Используя связь и обозначения (3.44), запишем:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}^+ e^{-\dot{\gamma}x} + \dot{V}^- e^{\dot{\gamma}x}; \\ \dot{I} &= (\dot{V}^+ e^{-\dot{\gamma}x} - \dot{V}^- e^{\dot{\gamma}x}) / Z_0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Восстановить из (3.45) действительные мгновенные значения функций можно по правилу $V(x,t) = \text{Re}[\dot{V}(x)e^{i\omega t}]$. Учитывая комплексный характер постоянной распространения, получим для напряжения

$$V(x,t) = V_m^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx + \varphi_0^+) + V_m^- e^{\alpha x} \cos(\omega t + kx + \varphi_0^-). \quad (3.46)$$

Итог решения телеграфного уравнения состоит в том, что в длинной линии распространение изменений тока и напряжения происходит в виде волновых процессов, причем величина α характеризует затухание волн, а k – является *волновым числом*. Надо также помнить, что фазовая скорость распространения волн $v_\phi = \omega/k$ в общем случае может зависеть от частоты возбуждения, что свидетельствует о наличии *дисперсии*.

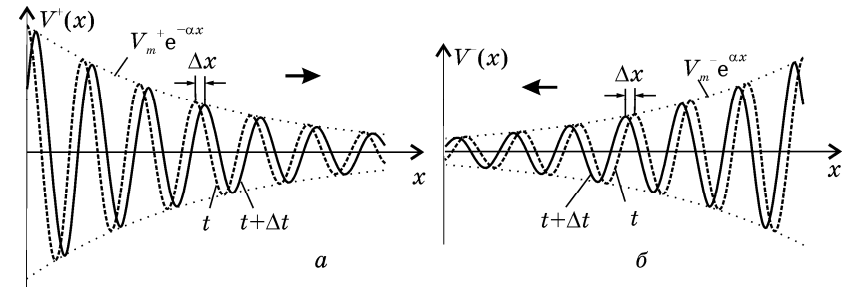


Рис. 3.10. Моментальные «фотографии» падающей (а) и отраженной (б) волн напряжения. Как падающая, так и отраженная волна затухают в направлении своего распространения.

В ряде случаев, особенно на высоких частотах, можно пренебречь затуханием в линии. Это возможно, если $r_0 \ll \omega L_0$ и $g_0 \ll \omega C_0$, то есть активное сопротивление проводников много меньше индуктивного, а токи утечки между проводами меньше токов смещения. При этом постоянная распространения $\dot{\gamma} = i\omega\sqrt{L_0 C_0} = ik$ ($\alpha = 0$), фазовая скорость $v_\phi = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ (дисперсия отсутствует), а волновое сопротивление $Z_0 = \sqrt{L_0 / C_0}$ имеет действительное значение. Решения (3.45) для линии без потерь принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}^+ e^{-ikx} + \dot{V}^- e^{ikx}; \\ \dot{I} &= (\dot{V}^+ e^{-ikx} - \dot{V}^- e^{ikx}) / Z_0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Определение констант интегрирования \dot{V}^\pm возможно, если известна мощность источника, который задает амплитуду падающей волны, и условия на нагрузочном конце линии, которые определяют степень отражения.

3.4.2. Стоячие волны в линии

Для дальнейшего анализа удобно поменять начало и направление отсчета, как это указано на рис. 3.11. Пока не определены постоянные интегрирования, это просто можно сделать заменой знака в фазовых множителях (3.47):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{V}^+ e^{ikx} + \dot{V}^- e^{-ikx}; \\ \dot{I}(x) &= (\dot{V}^+ e^{ikx} - \dot{V}^- e^{-ikx}) / Z_0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

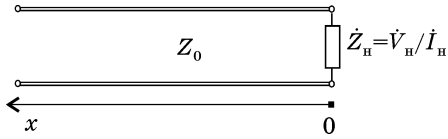


Рис. 3.11. Начало отсчета удобно выбрать в месте подключения нагрузки.

Степень отражения удобно характеризовать с помощью комплексного коэффициента отражения

$$\dot{\rho} = \dot{V}^- / \dot{V}^+ = |\dot{\rho}| e^{i\varphi_0}, \quad (3.49)$$

который включает модуль $|\dot{\rho}| = \dot{V}_m^- / \dot{V}_m^+$, равный отношению амплитуд отраженной и падающей волн, и фазу $\varphi_0 = \varphi_0^- - \varphi_0^+$, показывающую сдвиг фазы волны в месте отражения.

Чтобы понять, от чего и как зависит степень отражения, разделим первое выражение из (3.48) на второе для точки подключения нагрузки ($x = 0$). Учитывая, что $\dot{V}(0) = \dot{V}_n$, $\dot{I}(0) = \dot{I}_n$, а их отношение $\dot{V}_n / \dot{I}_n = \dot{Z}_n$, получим

$$\dot{Z}_n = Z_0 \frac{\dot{V}^+ + \dot{V}^-}{\dot{V}^+ - \dot{V}^-} = Z_0 \frac{1 + \dot{\rho}}{1 - \dot{\rho}}. \quad (3.50)$$

Отсюда видно, что коэффициент отражения полностью определяется сопротивлением нагрузки, точнее, ее соотношением с волновым сопротивлением линии передачи

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{Z}_n - Z_0}{\dot{Z}_n + Z_0}. \quad (3.51)$$

Итак, при заданных сопротивлениях \dot{Z}_n и Z_0 может быть найден коэффициент отражения (его модуль и фаза), а значит, известными становятся функции распределения тока и напряжения вдоль линии передачи с точностью до постоянного множителя (комплексной амплитуды падающей волны):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{V}^+ (e^{ikx} + \dot{\rho} e^{-ikx}); \\ \dot{I}(x) &= \dot{V}^+ (e^{ikx} - \dot{\rho} e^{-ikx}) / Z_0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Эти выражения, записанные в виде суммы падающих и отраженных волн, также можно представить в другом эквивалентном виде, вынося за скобки экспоненту с пространственным набегом фазы и восстановив для наглядности временной множитель

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= \dot{V}^+ (1 + \dot{\rho} e^{-i2kx}) e^{i(\omega t + kx)}; \\ \dot{I}(x, t) &= \dot{I}^+ (1 - \dot{\rho} e^{-i2kx}) e^{i(\omega t + kx)}. \end{aligned} \quad (3.52a)$$

Такая запись представляет собой напряжение и ток в каждой точке длинной линии в виде только падающей волны, но с амплитудами, зависящими от координаты. При разработке устройств, использующих отрезки линий передачи, часто надо знать распределение амплитуды напряжения и (или) тока вдоль линии. Для действительных амплитуд

$$\begin{aligned} V_m(x) &= |\dot{V}(x)| = V_m^+ |1 + \dot{\rho} e^{-i2kx}| = V_m^+ |1 + |\dot{\rho}| e^{-i(2kx - \varphi_0)}|; \\ I_m(x) &= |\dot{I}(x)| = I_m^+ |1 - \dot{\rho} e^{-i2kx}| = I_m^+ |1 - |\dot{\rho}| e^{-i(2kx - \varphi_0)}|. \end{aligned} \quad (3.53)$$

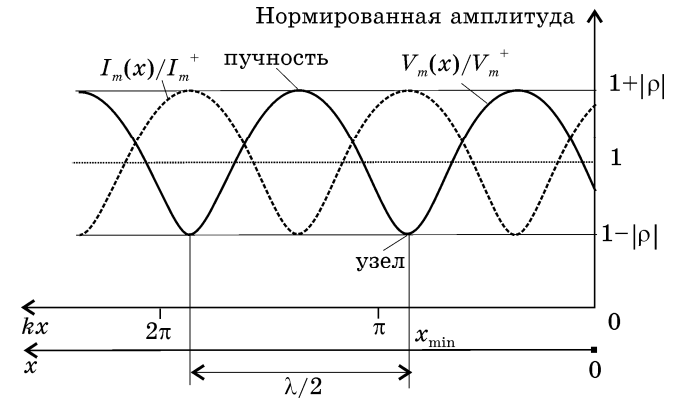


Рис. 3.12. Суперпозиция падающей и отраженной волн приводит к периодическому изменению амплитуды с пространственным периодом в половину длины волны. Распределение амплитуд волн напряжения (сплошная линия) и тока (штриховая) вдоль линии сдвинуты относительно друг друга на четверть длины волны.

Эти функции являются периодическими с пространственным периодом $\Delta x = \lambda/2$, на котором аргумент экспоненты $2k\Delta x$ изменяется на 2π . Характерными для них

являются точки с максимальной амплитудой, так называемые *пучности*, и точки с минимальной амплитудой – *узлы*. Такая ситуация возникает за счет суперпозиции колебаний, вызванных падающей и отраженной волнами. Результат наложения зависит от разности фаз, с которыми встречаются волны в данной точке. Вычитая аргументы при косинусах в (3.46), получим

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx + \varphi_0^-) - (\omega t + kx + \varphi_0^+) = -2kx + \varphi_0. \quad (3.54)$$

Пучности образуются в тех точках, где эта разность кратна 2π . Такие колебания будут синфазными и их результирующая амплитуда равна сумме $V_m^+ + V_m^- = V_{m \max}$. Узлы соответствуют тем точкам, где падающая и отраженная волны встречаются с фазовым сдвигом кратным нечетному числу π . За счет противофазности таких колебаний амплитуда в узлах будет равна разности $V_m^+ - V_m^- = V_{m \min}$. Отраженная волна тока имеет дополнительный сдвиг по фазе на π по сравнению с отраженной волной напряжения, о чем свидетельствует знак «-» перед вторым слагаемым для тока в (3.52) и (3.53). Это приводит к тому, что узлам тока соответствуют пучности напряжения и наоборот.

Примечательно, что разность фаз $\Delta\varphi$ в (3.54) *не зависит от времени*: в каждой точке она определяется лишь сдвигом фазы при отражении φ_0 и удвоенным («туда и обратно») пространственным набегом фазы $2kx$ между точкой x и точкой подключения нагрузки. Поэтому кривая распределения амплитуд, а значит и положение узлов и пучностей, не зависит от времени. С этим и связано название – «стоячая волна».

Для более детального анализа функций распределения амплитуд рассмотрим графический способ их определения. В каждой точке комплексная амплитуда напряжения в соответствии с (3.52) находится как сумма двух комплексных амплитуд: падающей волны $V_m^+ e^{ikx}$ (начальная фаза φ_0^+ обычно может быть принята равной 0) и отраженной волны $V_m^- e^{i(-kx + \varphi_0)}$. Результирующее напряжение удобно найти на комплексной плоскости (рис. 3.13, а) как сумму вектора с длиной V_m^+ и пространственной частью фазы kx и вектора с длиной $V_m^- = |\rho| V_m^+$ и фазой $(\varphi_0 - kx)$, состоящей из сдвига при отражении $\varphi_0 = \varphi_0^- - \varphi_0^+$ и пространственного набега $-kx$. Действительная амплитуда напряжения равняется длине суммарного вектора. При перемещении от нагрузки фаза kx увеличивается, и вектор падающей волны вращается против часовой стрелки, а вектор отраженной в обратном направлении. В точках, где эти векторы

совпадают по направлению, образуется пучность, а там, где они противоположны – узел.

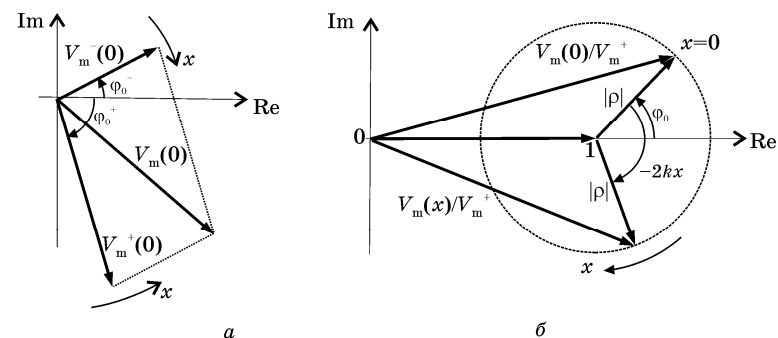


Рис. 3.13. Графическое определение результирующей амплитуды на комплексной плоскости (а). То же самое для векторов, нормированных на амплитуду падающей волны (б)

Такое построение удобнее делать, пронормировав все слагаемые на комплексную амплитуду напряжения падающей волны. При этом ее можно на комплексной плоскости изобразить единичным вектором, а отраженную – вектором ρe^{-i2kx} (рис. 3.13, б). В точке присоединения нагрузки ($x = 0$) амплитуда нормированного напряжения равняется $|1 + |\rho| e^{i\varphi_0}|$. В произвольной точке x' фаза падающей волны увеличится, а фаза отраженной – уменьшится на kx' . В результате дополнительный сдвиг между ними будет составлять $2kx'$ и нормированная амплитуда находится как длина вектора $1 + \rho e^{-i2kx'}$. При перемещении от нагрузки к источнику конец результирующего вектора напряжения описывает окружность $|\rho| = \text{const}$ (с центром в точке 1), периодически проходя через точки максимума $|\dot{V} / \dot{V}^+|_{\max} = 1 + |\rho|$, где падающая и отраженная волны синфазны, и минимума $|\dot{V} / \dot{V}^+|_{\min} = 1 - |\rho|$, где они противофазны. Поскольку нормированный вектор отраженной волны вращается по часовой стрелке с «удвоенной частотой» за счет встречного набега фаз (kx – для падающей и $-kx$ – для отраженной), то период функции распределения амплитуды напряжения равняется π вдоль фазовой оси kx и $\lambda/2$ – по оси расстояний x . Этот факт широко используется для измерения длины волны в линии. Практически важно также то, что кривая $V_m(x)$ более острая в окрестности минимума.

Первый от нагрузки узел x_{\min} расположен в том месте, где фазовый сдвиг $\Delta\varphi(x_{\min}) = \pi$. Отсюда следует, что в соответствии с (3.54) его расположение однозначно связано с фазой коэффициента

отражения: $\varphi_0 = \pi + 2kx_{\min} = \pi(1 + 4x_{\min}/\lambda)$. Этот факт используется для нахождения фазы коэффициента отражения по измеренному положению узла стоячей волны.

Распределение амплитуды тока вдоль линии повторяет распределение напряжения, но максимумы тока совпадают с минимумами напряжения и наоборот. Это происходит из-за того, что условия отражения для волн тока и напряжения разные. При отражении от нагрузки волна тока имеет дополнительный сдвиг фазы на 180° (знак "-" перед вторым слагаемым в выражении (3.53) для тока).

Итак, в результате наложения двух встречных волн получается, что в разных точках линии передачи напряжение $V(x, t) = V_m(x) \cos(\omega t + \varphi_v(x))$ и ток $i(x, t) = I_m(x) \cos(\omega t + \varphi_u(x))$ имеют разные значения амплитуды и фазы. Распределение амплитуд не зависит от времени, поэтому такая суперпозиция называется стоячей волной.

Принято кривую распределения амплитуды количественно характеризовать коэффициентом стоячей волны (КСВ), который равен отношению максимальной и минимальной амплитуд

$$\text{КСВ} = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (3.55)$$

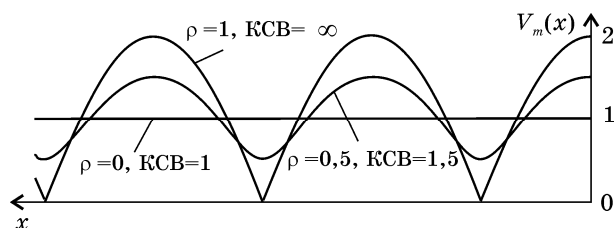


Рис. 3.14. Форма пространственного распределения амплитуды напряжения характеризуется коэффициентом стоячей волны.

и однозначно связан с модулем коэффициента отражения. Диапазон возможных значений КСВ лежит в пределах между 1 и ∞ (рис. 3.14).

Степень отражения определяет и величину мощности, которая поступает из линии в нагрузку. Мгновенная мощность определяется произведением тока $i(x, t)$ и напряжения $V(x, t)$. Она является довольно сложной функцией координаты и времени и содержит некоторую постоянную составляющую и переменную, изменяющуюся со временем с частотой 2ω . Если ограничиться только средней за временной период мощностью, которая и

определяет активную мощность, передаваемую из линии в нагрузку, то ее легко определить как действительную часть комплексной мощности. Комплексная мощность, передаваемая по линии передачи, может быть найдена через комплексные амплитуды напряжения и тока (3.48): $\dot{P}(x) = \dot{V}(x)\dot{I}^*(x)/2$. Подстановка значений из (3.52) дает

$$\begin{aligned} P_{\text{н}} &= \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{V}^+ \dot{I}^{+*} (1 + \rho e^{-i2kx})(1 - \rho^* e^{i2kx})] = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{V}^+ \dot{I}^{+*} (1 - |\rho|^2)] = P^+ (1 - |\rho|^2), \end{aligned} \quad (3.56)$$

где P^+ – мощность падающей волны. Данный результат показывает, что отдаваемая в нагрузку мощность определяется квадратом модуля коэффициента отражения ρ . Иногда используют коэффициент отражения мощности $R = P^-/P^+$, который связан с амплитудным коэффициентом отражения соотношением $R = 1 - |\rho|^2$.

3.4.3. Трансформация сопротивления в линиях

Количественные расчеты для устройств, которые включают отрезки линий передачи, часто проводят в терминах сопротивлений. Введем понятие комплексного сопротивления в данной точке, как отношения комплексных амплитуд тока и напряжения. Поскольку напряжение и ток разные в разных точках линии, то в общем случае и сопротивление зависит от координаты

$$\dot{Z}(x) = \dot{V}(x)/\dot{I}(x). \quad (3.57)$$

Установить этот закон изменения можно, разделив выражения для напряжения и тока из (3.52). Подставляя вместо ρ его связь (3.51) с сопротивлением нагрузки, после тождественных преобразований получим

$$\dot{Z}(x) = Z_0 \frac{\dot{Z}_{\text{н}} + iZ_0 \text{tg} kx}{Z_0 + i\dot{Z}_{\text{н}} \text{tg} kx}. \quad (3.58)$$

Это выражение показывает, как сопротивление нагрузки $\dot{Z}_{\text{н}}$ трансформируется в сопротивление $\dot{Z}(x)$ в данной точке линии. Аналогичное выражение

$$\dot{Z}_2 = Z_0 \frac{\dot{Z}_1 + iZ_0 \operatorname{tg} k(x_2 - x_1)}{Z_0 + i\dot{Z}_1 \operatorname{tg} k(x_2 - x_1)} \quad (3.59)$$

показывает закон трансформации сопротивления из точки x_1 в точку x_2 .

В завершение рассмотрим два частных, но характерных примера.

1. *Режим согласования* (бегущей волны). Из выражения (3.51) следует, что отражение будет отсутствовать, если линия

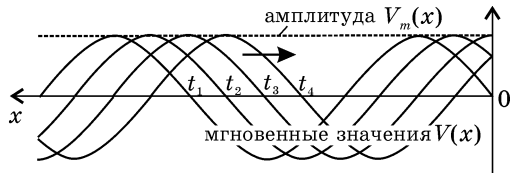


Рис. 3.15. Мгновенные «фотографии» волнового процесса в режиме бегущей волны. Амплитуда волны во всех точках одинакова.

нагружена на сопротивление, равное волновому $\dot{Z}_H = Z_0$. В этом случае в линии будет существовать только бегущая волна, амплитуда ее во всех точках будет одинаковой (рис. 3.15) и КСВ = 1. Одинаковым и равным волновому будет также сопротивление в любой точке линии (3.58).

2. *Режим полного отражения*. Если в выражении (3.51) вместо \dot{Z}_H подставить любую мнимую величину, то числитель и знаменатель будут комплексно сопряженными, а их модули одинаковыми. Поэтому полное отражение ($|\rho| = 1$) будет в линии,

нагруженной на чисто реактивную нагрузку $\dot{Z}'_H = \dot{Z}_H / Z_0 = 0 + iX'_H$.

Физически это означает, что такая нагрузка не поглощает энергию и волна полностью отражается. В этом случае образуется чисто стоячая волна с нулевой амплитудой в узлах и удвоенной в пучностях, которые соответствует КСВ = ∞. Подобная ситуация наблюдается и в режиме короткого замыкания ($\dot{Z}_H = 0, \rho = -1$),

либо холостого хода ($\dot{Z}_H = \infty, \rho = 1$).

На практике режим полного отражения чаще всего реализуют с помощью короткого замыкания линии. В этом случае $\rho = -1$ и в линии образуются *чисто стоячие волны* напряжения и тока с распределением амплитуд, указанных на рис. 3.16,б.

Распределения для мгновенных значений легко восстановить из (3.48) для комплексных амплитуд при условии $\dot{V}^- = -\dot{V}^+$:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= -2V_m^+ \sin kx \sin \omega t, \\ i(x, t) &= 2V_m^+ \cos kx \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Строго говоря, эти выражения, полученные как сумма двух встречных волн с равными амплитудами, описывают не волновой процесс, а колебания (рис. 3.16,а) с удвоенной амплитудой в узлах и нулевой в пучностях. Формальным признаком этого является отсутствие аргумента, куда координата и время входят как линейная комбинация.

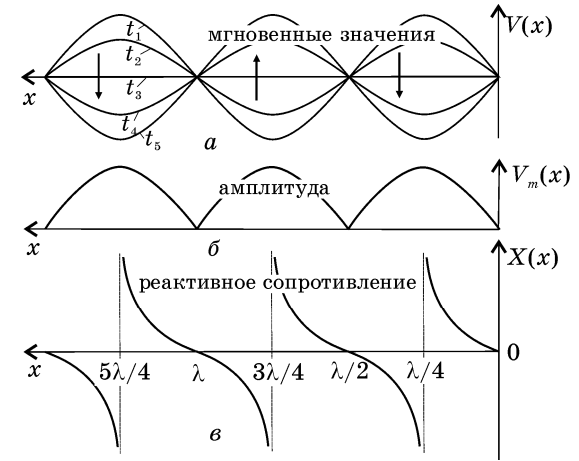


Рис. 3.16. Распределение мгновенных значений волны напряжения (а), ее амплитуды (б) и реактивного сопротивления (в) вдоль линии при коротком замыкании.

Сопротивление короткого замыкания $Z_H = 0$ трансформируется в чисто реактивное сопротивление, которое изменяется вдоль линии по закону (рис. 3.16,в)

$$\dot{Z}(x) = iZ_0 \operatorname{tg} kx. \quad (3.61)$$

Это свойство используется для создания элементов, входное сопротивление которых будет чисто реактивным. В технике реактивные элементы часто конструируют как отрезки короткозамкнутых линий, их называют *шлейфами*. Так, входное сопротивление для отрезка длиной, меньшей $\lambda/4$, имеет индуктивный характер, большей $\lambda/4$, но меньшей $\lambda/2$ – емкостной характер. Величина реактивности может быть любой в

зависимости от длины отрезка. Интересно отметить, что четвертьволновые отрезки, длина которых кратна нечетному числу четвертей длин волн, имеют бесконечно большое входное сопротивление, которое соответствует режиму холостого хода. Это его свойство находит широкое применение в технике элементов линии передачи. Входное сопротивление короткозамкнутых полуволновых отрезков, длина которых кратна целому числу половин длин волн, равно нулю. Они также имеют *резонансные свойства*.

Рассмотренные режимы являются «крайними». В промежуточных случаях при неравенстве сопротивления нагрузки и волнового сопротивления в линии устанавливается режим смешанных волн, который можно рассматривать как суперпозицию режимов бегущей и чисто стоячей волны. При этом КСВ будет отличным от 1, в узлах амплитуда колебаний не будет нулевой, а в пучностях – удвоенной. Сопротивление вдоль линии будет изменяться в соответствии с (3.58) для данного значения Z_n , а мощность падающей волны не будет полностью поглощаться такой нагрузкой (3.56), часть ее, равная $(1 - |\rho|^2)$ будет отражаться.

В технических устройствах такой режим имеет целый ряд недостатков (дополнительные потери в линии за счет колебаний реактивной энергии, ухудшение частотных характеристик и т.д.). Для компенсации этого и получения режима бегущей волны используют так называемые *согласующие устройства*, которые, будучи включенными перед нагрузкой, создают отраженную волну, равную по амплитуде и противоположную по фазе волне, отраженной от нагрузки. В результате интерференции этих волн в линии перед согласующим устройством устанавливается режим бегущей волны. Такое устройство должно быть чисто реактивным, чтобы не создавать дополнительные потери. Для его расчета с помощью выражения (3.58) находят в линии такую точку x^* , в которой сопротивление имеет активную составляющую, равную волновому: $Z(x^*) = Z_0 \pm iX(x^*)$. При включении в этом месте согласующего элемента, например, шлейфа с реактивным сопротивлением $\mp X(x^*)$, таким же по величине, но противоположным по знаку, суммарное сопротивление будет равно волновому. В итоге нагрузку вместе с согласующим элементом можно рассматривать как согласованную, обеспечивающую режим бегущей волны. При этом между нагрузкой и согласующим элементом будет режим стоячих волн. Обычно точек x^* , удовлетворяющих условию согласования, может быть множество, но выбирать надо ту, которая находится как можно ближе к нагрузке.