АНАЛИЗ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ СРЕД ПРИ ПОМОЩИ ВОЛНОВЫХ МАТРИЦ

Уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для диэлектрика без потерь:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Для периодических полей

$$A = A_m \cos(\omega t + \varphi_A) = \operatorname{Re}\left\{A_m e^{i(\omega t + \varphi_A)}\right\} \equiv \operatorname{Re}\left\{\dot{A} e^{i\omega t}\right\} \tag{1.3}$$

(1.2) следует из:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = i\omega\dot{\mathbf{D}}, \\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\dot{\mathbf{B}}, \\ \operatorname{div}\dot{\mathbf{D}} = 0, \\ \operatorname{div}\dot{\mathbf{B}} = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Решив (1.4), решим и (1.2) при помощи формулы перехода (1.3).

Из (1.4) можно исключить $\dot{\mathbf{D}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$ ($\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$). Сделаем это (пишем $\varepsilon(\mathbf{r})$, чтобы не забыть, что среда – слоистая):

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})\dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{div}\,\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})\dot{\mathbf{E}} = 0, \\ \operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Подействуем на первые два уравнения оператором **rot** (первое перед этим умножим на $\eta(\mathbf{r}) = 1/\varepsilon(\mathbf{r})$):

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\eta(\mathbf{r})\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon_0\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu_0\mu\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{div}\,\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})\dot{\mathbf{E}} = 0, \\ \operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Поскольку для любого **A** справедливо тождество:

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$, и учитывая 4-е уравнение системы (1.6), второе уравнение (1.6) можно записать в виде:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} = i\omega\mu_0\mu\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}},$$

а первое – просто перепишем более компактно в виде:

$$\nabla\times\left(\eta(\mathbf{r})\nabla\times\dot{\mathbf{H}}\right) = i\omega\varepsilon_0\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}.$$

Сконцентрируемся на системе:

$$\begin{cases} \nabla^2\dot{\mathbf{E}} = i\omega\mu_0\mu\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}; \\ \nabla\times\left(\eta(\mathbf{r})\nabla\times\dot{\mathbf{H}}\right) = i\omega\varepsilon_0\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Выражения для роторов из (1.5) помогут окончательно оформить систему в готовом для решения виде:

$$\begin{cases} \eta(\mathbf{r})\nabla^2\dot{\mathbf{E}} = -\omega^2\mu_0\mu\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}, \\ \nabla\times\left(\eta(\mathbf{r})\nabla\times\dot{\mathbf{H}}\right) = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\mu\dot{\mathbf{H}}. \end{cases} \tag{1.8}$$

В дальнейшем положим $\mu = 1$, поскольку диэлектрики редко обладают магнитными свойствами.

Для случая нормального падения плоской волны ($\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}\mathbf{e}_x$ $\dot{\mathbf{H}} = \dot{H}\mathbf{e}_y$) на слои, расположенные перпендикулярно направлению 0z ($\eta(\mathbf{r}) = \eta(z)$) система (1.8) имеет вид:

$$\begin{cases} \eta(z)\dfrac{d^2\dot{E}}{dz^2} = -\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\dot{E}, \\ \dfrac{d}{dz}\left(\eta(z)\dfrac{d}{dz}\dot{H}\right) = -\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\dot{H}. \end{cases} \tag{1.9}$$

где $c_0 \equiv 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$.– скорость света в вакууме.

В рамках *i*-го слоя система имеет решение:

$$\begin{cases} \dot{E}_i = \dot{E}^+_{m,i}e^{-ik_iz} + \dot{E}^-_{m,i}e^{ik_iz}, \\ \dot{H}_i = \dot{H}^+_{m,i}e^{-ik_iz} - \dot{H}^-_{m,i}e^{ik_iz}, \end{cases}$$

где $k_i = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_i}$

Поскольку второй порядок системы (1.9) достигался ранее искусственным повышением порядка дифференциального уравнения на 1 путем действия rot, то из 4 только 2 постоянных интегрирования являются независимыми:

$$\frac{E^+_{m,i}}{H^+_{m,i}} = \frac{E^-_{m,i}}{H^-_{m,i}} = \sqrt{\frac{\mu_i\mu_0}{\varepsilon_i\varepsilon_0}} \equiv Z_{c,i} \tag{1.10}$$

(эту связь можно получить из первого или второго уравнений (1.5)).

Обычно хватает анализа поведения вектора $\dot{H}$.

Волновые матрицы

Как определить отражательные/пропускающие способности системы из произвольного количества слоев?

Введем некоторые обозначения:

$$\begin{cases} \dot{E}_i = \underbrace{\dot{E}_{m,i}^{+} e^{-ik_i z}}_{\dot{E}_i^{+}(z)} + \underbrace{\dot{E}_{m,i}^{-} e^{ik_i z}}_{\dot{E}_i^{-}(z)}, \\ \dot{H}_i = \underbrace{\dot{H}_{m,i}^{+} e^{-ik_i z}}_{\dot{H}_i^{+}(z)} - \underbrace{\dot{H}_{m,i}^{-} e^{ik_i z}}_{\dot{H}_i^{-}(z)}, \end{cases}$$

Матрица передачи

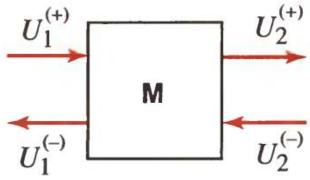
Падающую и отраженную волну в любой точке пространства – для определенности z_1 – ($\dot{H}_i^{+}(z_1), \dot{H}_i^{-}(z_1)$) можно выразить через падающую и отраженную волны в любой другой точке пространства (или в этой же, но с другой стороны слоя) ($\dot{H}_j^{+}(z_2), \dot{H}_j^{-}(z_2)$). Матрица, которая связывает эти две пары волн называется волновой матрицей передачи или просто *матрицей передачи*.

Для краткости далее будем писать

$\left\{U_i^{+}, U_i^{-}\right\} \equiv \left\{\dot{H}_i^{+}(z_1), \dot{H}_i^{-}(z_1)\right\}$, то есть координаты точек будем держать в уме. В таких обозначениях матрица передачи вводится из матричного уравнения:

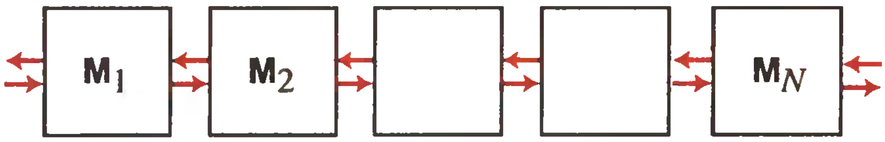
(определение)

$$\begin{bmatrix} U_2^{+} \\ U_2^{-} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{M}} \begin{bmatrix} U_1^{+} \\ U_1^{-} \end{bmatrix} \qquad (1.11)$$



Ее элементы зависят и с точки зрения оптических свойств полностью характеризуют среду между рассматриваемыми плоскостями.

Матрица передачи обладает свойством *мультипликативности*, то есть если имеется система, состоящая из следующих друг за другом слоев и границ,



для каждого из которых матрица **M** известна, то матрица передачи всей системы равна произведению матриц передачи каждого элемента, взятого в обратном порядке:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_N \times \mathbf{M}_{N-1} \times \ldots \times \mathbf{M}_1$$

Элементы матрицы передачи не имеют *непосредственного* физического смысла.

Матрица рассеивания

Точно так же как мы связали падающую и отраженную волны с двух сторон рассматриваемой системы, можно связать волны, сходящиеся и расходящиеся от системы. Матрица их связывающая – это *матрица рассеивания*. Она вводится так:

$$\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_1^- \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{S}} \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

Матрица рассеивания не обладает свойством мультипликативности, однако ее элементы имеют непосредственный физический смысл (именно поэтому они так «странно» обозначены). Последнее означает, что их можно измерить опытным путем.

Названия:

t_{12}, r_{12} – комплексный коэффициент прямой передачи, отражения;

t_{12}, r_{12} – комплексный коэффициент обратной передачи, отражения;

Рецепты нахождения следуют из раскрытия (1.12), например:

$$U_2^+ = t_{12}U_1^+ + r_{21}U_2^- \Rightarrow t_{12} = \left.\frac{U_2^+}{U_1^+}\right|_{U_2^-=0}, \qquad (1.13)$$

то есть прямой коэффициент передачи можно определить, подавая на вход известную волну и измеряя прошедшую волну на выходе. При этом, естественно, на выход ничего не подается.

Связь

Легко находится из определения матриц:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{t_{21}} \begin{bmatrix} t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} & r_{21} \\ -r_{12} & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} AD - BC & B \\ -C & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Как найти коэффициенты передачи и отражения для системы, которую можно разбить на подсистемы, матрицы рассеивания которых известны?

– найти соответствующие матрицы передачи;

– получить полную матрицу системы путем умножения матриц передачи подсистем;

- найти матрицу рассеивания, соответствующую матрице передачи. Элементы этой матрицы – искомые коэффициенты отражения и преломления.

Матрица передачи слоя вещества

В однородной среде есть две плоскости, между которыми необходимо определить матрицу рассеивания.

Поле вектора $\boldsymbol{E}$ запишется (обозначаем через U):

$$U(z) = U_m^+ \exp(-ikz) + U_m^- \exp(ikz).$$

Пусть плоскости заданы уравнениями $z_1 = 0$, $z_2 = d$, $\varphi \equiv nk_0 d$.

Волны, между которыми следует установить связь, равны:

$$U_1^+ \equiv U_m^+ \exp(-ikz)\big|_{z=0} = U_m^+,$$

$$U_1^- \equiv U_m^- \exp(ikz)\big|_{z=0} = U_m^-,$$

$$U_2^+ \equiv U_m^+ \exp(-ikz)\big|_{z=d} = U_m^+ e^{-i\varphi},$$

$$U_2^- \equiv U_m^- \exp(ikz)\big|_{z=d} = U_m^- e^{i\varphi}.$$

Матрицу **S** можно найти, используя определение ее элементов. Например, из (1.13):

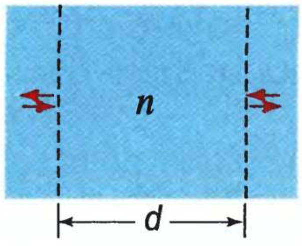
$$t_{12} = \left.\frac{U_2^+}{U_1^+}\right|_{U_2^-=0} = e^{-i\varphi}. \qquad (1.15)$$

Другой способ сконструировать **S**- и **M**- матрицы – использовать очевидные связи волн. Например, из того, что

$$U_2^+ = U_m^+ e^{-i\varphi} = U_1^+ e^{-i\varphi},$$

следует, что $A = e^{-i\varphi}$, $B = 0$.

Искомые матрицы имеют вид:

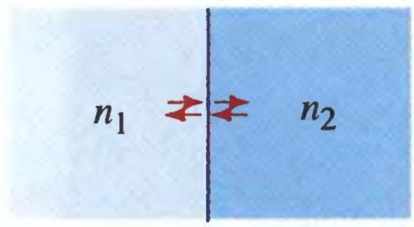


$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{bmatrix} \qquad (1.16)$$

Матрица передачи через границу

Необходимо использовать свойства непрерывности полей **E** и **H**, а также взаимосвязь их амплитуд (1.10). Можно напрямую использовать формулы Френеля, но кто владеет ими?

Пусть граница находится в точке $z=0$. Слева – вещество с ε_1, справа – с ε_2. Будем пользоваться т.н. «коэффициентом преломления», $n_1=\sqrt{\varepsilon_1}$, $n_2=\sqrt{\varepsilon_2}$:



Обозначим волновое число в вакууме $\frac{\omega}{c}$ через k_0. Тогда $k_{1(2)}=n_{1(2)}k_0$.

Слева и справа от границы решение волнового уравнения запишется:

$$\begin{cases} E_1(z)=E_{m1}^{+}e^{-ik_1z}+E_{m1}^{-}e^{ik_1z}, \\ H_1(z)=\dfrac{1}{Z_1}\left(E_{m1}^{+}e^{-ik_1z}-E_{m1}^{-}e^{ik_1z}\right). \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\begin{cases} E_2(z)=E_{m2}^{+}e^{-ik_2z}+E_{m1}^{-}e^{ik_2z}, \\ H_2(z)=\dfrac{1}{Z_2}\left(E_{m2}^{+}e^{-ik_2z}-E_{m2}^{-}e^{ik_2z}\right). \end{cases} \tag{1.18}$$

Отметим, что $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}=\dfrac{n_2}{n_1}$.

Поля обязаны быть непрерывными функциями координат, несмотря на скачкообразную границу сред. Поэтому потребуем непрерывности E и H в $z=0$:

$$\begin{cases} E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^-, \\ n_2(E_1^+ - E_1^-) = n_1(E_2^+ - E_2^-). \end{cases} \tag{1.19}$$

или

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 / n_2 & -n_1 / n_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Решение (1.20):

$$\begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_2 / n_1 & -n_2 / n_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

Определение обратной матрицы: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \equiv \dfrac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$.

Имеем:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 / n_2 & -n_1 / n_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{n_2 + n_1}{2n_2} & \dfrac{n_2 - n_1}{2n_2} \\ \dfrac{n_2 - n_1}{2n_2} & \dfrac{n_2 + n_1}{2n_2} \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

Найдем **S**. Для этого воспользуемся (1.14).

Получим:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n_2 + n_1} \begin{bmatrix} 2n_1 & n_2 - n_1 \\ n_1 - n_2 & 2n_2 \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы **S** можно получить так же, как были получены элементы **M**, то есть записав (1.19) в матричном виде, где столбцами будут расходящиеся и сходящиеся волны.

Домашнее задание

↓

↓

↓

Задание 1. Записать выражения для оставшихся неопределенными элементов матрицы **S**. (см. (1.13)).

Задание 2. Найти матрицу передачи через слой однородной среды толщиной *d*, и следующую за ним границу. Показатели преломления известны (см. рис.)