ЛЕКЦИЯ 3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФОТОНОВ С АТОМАМИ

А. Взаимодействие одномодового света с атомом

Из квантовой механики известно, что атомы могут излучать/поглощать фотоны, совершая переходы между энергетическими уровнями. Ниже описаны законы, которым подчиняются эти процессы.

Взаимодействие атома с фотонами заданной моды

Пусть имеется резонатор, объемом V, поле в котором может существовать в виде ряда мод. Рассмотрим два уровня энергии атома, E_1 и E_2. Наиболее важны взаимодействия атома с фотонами тех мод, частота ν которых близка к «резонансной» частоте атома: $\nu \approx \nu_0$, где $h\nu_0 = E_2 - E_1$.

Такие взаимодействия – предмет изучения *квантовой электродинамики*. Ниже (без доказательства) представлены основные закономерности взаимодействия фотонов и атомов. Всего возможно три типа взаимодействий таких взаимодействий: спонтанное излучение, спонтанное поглощение, вынужденное излучение.

Спонтанное излучение.

Условие спонтанного излучения:

1. Атом находится на верхнем энергетическом уровне (E_2).

Находясь на уровне E_2, атом может самопроизвольно или, как говорят, «спонтанно» перейти с уровня E_2 на уровень E_1, излучив фотон энергии $h\nu$ (рис. 1). Энергия этого фотона добавляется к энергии моды электромагнитного поля. Этот процесс называется «спонтанным излучением». Слово «спонтанный» употребляется, поскольку такой переход не зависит от количества фотонов, которые уже есть в моде, куда данный фотон излучается.

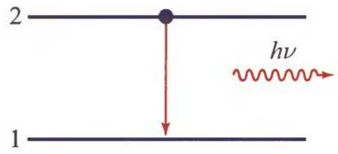

Рис. 1. Спонтанное излучение фотона в моду частоты ν путем перехода атома из уровня 2 на уровень 1. Энергия фотона $h\nu \approx E_2 - E_1$.

В полости объема V, плотность вероятности (вероятность в единицу времени) спонтанных переходов в данную моду частоты ν равна:

$$p_{sp} = \frac{c}{V}\sigma(\nu), \tag{1.1}$$

где c – скорость $\sigma = \left[\text{м}^2\right]$ – т.н. «сечение перехода». зависящее от частоты; $\sigma(\nu)$ имеет резкий максимум (резонанс) в области резонансной частоты ν_0 атома. Обычно σ определяют экспериментально, поскольку теоретические расчеты достаточно сложны.

Сечение каждой моды, имеющей частоту ν, зависит от угла Θ между дипольным моментом атома и направлением поля в моде по закону:

$$\sigma(\Theta) = \sigma_{\text{max}} \cos^2 \Theta. \tag{1.2}$$

Значение σ_{max}, очевидно, достигается, когда дипольный момент и поле сонаправлены.

Пусть в момент времени $t = 0$ количество атомов в возбужденном состоянии составляет N. Решим вопрос о временной эволюции величины $N(t)$. Вероятность спонтанного перехода 2→1 каждого атома за время Δt равна $p_{sp}\Delta t$. Если число N достаточно велико, за время Δt изменение количества возбужденных атомов составит $N(t+\Delta t) - N(t) \equiv \Delta N = -p_{sp}\Delta t N$ (ΔN атомов перейдет со 2-го на 1-й уровень). Переходя от конечных к бесконечно малым приращениям, получим дифференциальное уравнение, описывающее релаксацию возбужденных атомов:

$$\frac{dN}{dt} \equiv -p_{sp}N,$$

решение которого $N(t) = N(0)\exp(-p_{st}t)$ описывает возврат в нормальное ($E = E_1$) состояние с постоянной времени $\tau = 1/p_{st}$ – рис. 2.

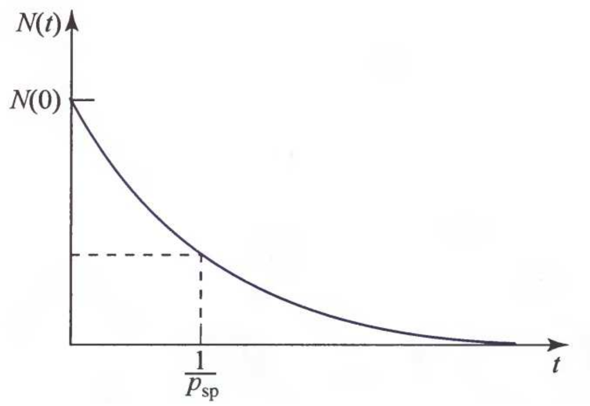

Рис. 2. Спонтанное излучение в заданную моду приводит к экспоненциальному уменьшению количества возбужденных атомов с постоянной времени $1/p_{st}$.

Поглощение.

Условия поглощения фотона из моды частоты ν:

1. Атом находится на нижнем энергетическом уровне (E_1).

2. Имеется фотон, принадлежащий моде частоты ν.

Если условия поглощения выполнены, атом способен поглотить фотон, и перейти на верхний энергетический уровень (E_2) – рис. 3. Такой процесс называется поглощением. Подчеркнем, что в отличие от излучения поглощение происходит всегда только вынуждено; оно, как говорят, *индуцируется* фотоном (второе условие).

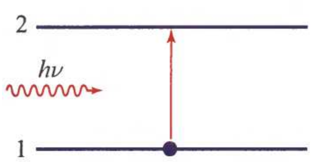

Рис. 3. Поглощение фотона, имеющего энергию $h\nu$, приводит к переходу с нижнего на верхний энергетический уровень.

Плотность вероятности поглощения фотона p_{ab} из данной моды частоты ν подчиняется тому же закону что и p_{sp}:

$$p_{ab} = \frac{c}{V}\sigma(\nu). \qquad (1.3)$$

Если в рассматриваемой моде содержится n фотонов, плотность вероятности поглощения одного из них увеличивается в n раз. Действительно, поглощения одного любого фотона из n исключает поглощение второго, поэтому соответствующие вероятности складываются как вероятности взаимоисключающих событий; получим:

$$P_{ab} = n\frac{c}{V}\sigma(\nu), \qquad (1.4)$$

где P_{ab} – вероятность поглощения одного фотона из моды, содержащей n фотонов.

Вынужденное излучение.

Условия спонтанного излучения в моду частоты ν:

1. Атом находится на верхнем энергетическом уровне (E_2).

2. Имеется фотон, принадлежащий моде частоты ν.

Если условия 1 и 2 выполняются, атом может перейти на нижний энергетический уровень, излучив фотон в моду частотой ν. Такой процесс называется «*вынужденным*» или «*индуцированным*» излучением, это процесс, противоположный поглощению. Наличие фотона в данной моде (которая задается частотой, направлением распространения и поляризацией) вызывает («вынуждает», «стимулирует») переход на нижний уровень с излучением фотона-«дубликата» или «клона», который обладает в точности такими же свойствами, что и оригинал (рис. 4).

Процесс увеличения количества абсолютно одинаковых фотонов за счет вынужденного излучения лежит в основе работы лазеров.

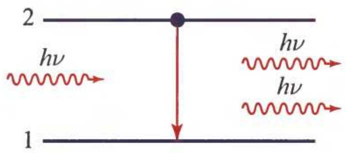

Рис. 4. Вынужденное излучение – это процесс, при котором фотон $h\nu$ вынуждает атом излучить фотон-«клон» при переходе на нижний уровень энергии

Плотность вероятности p_{st} вынужденного излучения фотона в данную моду частоты ν, содержащую n фотонов, подчиняется тому же закону, что и вероятность поглощения одного фотон из моды, содержащей n фотонов. В дальнейшем, обе эти величины будем именовать W_i:

$$W_i \equiv P_{ab} = P_{st} = n\frac{c}{V}\sigma(\nu). \qquad (1.5)$$

С учетом спонтанного излучения, итоговая плотность вероятности излучения фотона в данную моду с частотой ν равна:

$$P_e = p_{sp} + P_{st} = (n+1)\frac{c}{V}\sigma(\nu).$$

Отметим, что аналога спонтанного излучения для поглощения не существует.

Ниже рассмотрены следствия трех базовых процессов взаимодействия фотонов с атомами.

Формфактор линии перехода

Сечение перехода $\sigma(\nu)$ характеризует взаимодействие атома с излучением. Площадь под кривой $\sigma(\nu)$

$$S = \int_0^\infty \sigma(\nu)d\nu = \left[\text{см}^2\,\text{Гц}\right] \qquad (1.6)$$

называется *скоростью переходов*. Зависимость $\sigma(\nu)$ определяет интенсивность взаимодействия атома с фотонами различной частоты. Введем величину

$$g(\nu) = \sigma(\nu) \,/\, \int_0^\infty \sigma(\nu) d\nu = \sigma(\nu) \,/\, S = \left[\text{Гц}^{-1}\right], \qquad (1.7)$$

которая будет теперь характеризовать *относительную* интенсивность взаимодействия, и поэтому характеризовать лишь *форму* сечения перехода. Оказывается, что существует всего несколько форм линии $\sigma(\nu)$. Это позволяет найти $\sigma(\nu)$, если известна скорость S:

$$\sigma(\nu) = Sg(\nu). \qquad (1.8)$$

Функция $g(\nu)$, определяемая соотношением (1.7), называется *форм-фактором* линии перехода. Из определения следует, что

$$\int_0^\infty g(\nu) d\nu = 1.$$

Форм-фактор $g(\nu)$ имеет резкий максимум при резонансной частоте атома ν_0, и резко убывает в обе стороны при удалении от ν_0. Такая форма соответствует интуитивной догадке о том, что наибольшая вероятность переходов должна быть для фотонов с резонансной частотой $\nu \approx \nu_0$. Интервал $\Delta\nu$ между точками, где $g(\nu) = g(\nu_0)/2$ называется шириной линии перехода. Из двух форм-факторов $\Delta\nu$ будет шире у того, чей максимум $g(\nu_0)$ меньше. Это следует из нормировки $g(\nu_0)$.

Таким образом, сечение перехода определяют: пиковое значение сечения $\sigma_0 \equiv \sigma(\nu_0)$, ширина линии $\Delta\nu$ и площадь S под $\sigma(\nu)$ (рис. 5).

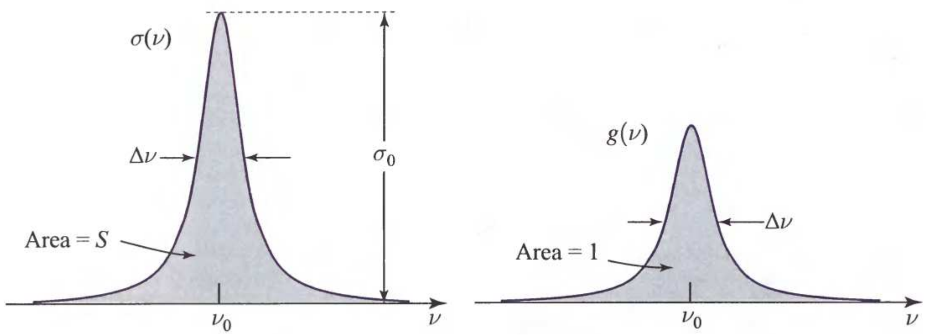

Рис. 5. Сечение перехода $\sigma(\nu)$ и его форм-фактор $g(\nu)$.

B. Взаимодействие одномодового света с атомом

Полная спонтанная эмиссия во все моды

Соотношение (1.1) определяет количество актов спонтанного испускания фотона в заданную моду частоты ν в единицу времени p_{sp}. Введем понятие спектральной плотности мод в единице объема $M(\nu)$. Это величина, равная количеству мод в единичном объеме в единичной полосе частот

$$M(\nu)=\frac{p_n(\nu)}{V}=\frac{dn(\nu)}{d\nu}\bigg/V\,, \tag{1.9}$$

где $p_n(\nu)=dn/d\nu$ – спектральная плотность мод (количество мод dn в интервале частот $d\nu$). Понятие плотности мод $M(\nu)$ целесообразно использовать при большом их количестве (когда их сложно и бесполезно считать), что соответствует случаю, когда интересующие длины волн много меньше линейных размеров данного объема.

Для резонатора (полости) в трехмерном пространстве $M(\nu)$ задается соотношением [1] (рис. 6):

$$M(\nu)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}=\left[\frac{1}{\text{м}^3}\frac{1}{\text{Гц}}\right]. \tag{1.10}$$

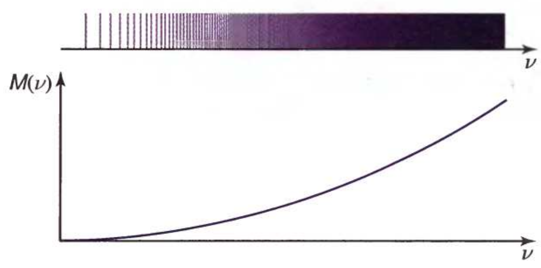

Рис. 6. (*а*) С ростом частоты расстояние между модами уменьшается, (*б*) плотность мод для трехмерного оптического резонатора пропорциональна квадрату частоты.

Атом, находящийся на уровне E_2 может излучить один фотон частотой ν в одну из этих мод, как схематически показано на рис. 7.

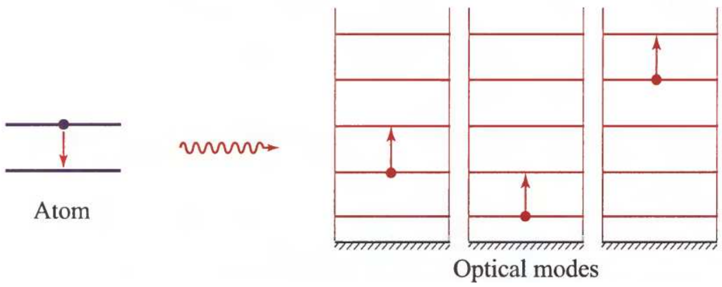

Рис. 7. Атом может спонтанно излучить фотон в одну и только одну из множества оптических мод, имеющих частоты $\nu \approx \nu_0$.

Уравнение (1.1) определяет вероятность спонтанного излучения в одну конкретную моду частоты ν. Вероятность спонтанного излучения в какую-либо моду P_{sp} находится как сумма вероятностей излучения в каждую из мод, поскольку эти события взаимоисключающие. Найдем сначала плотность вероятности dP_{sp} того, что будет излучен фотон, энергия которого лежит в пределах $\nu \ldots \nu + d\nu$. Сосчитаем количество мод в этом интервале. Из определения (1.9) функции $M(\nu)$ следует: $dn = VM(\nu)d\nu$. Плотность вероятности излучения в dn мод превышает плотность вероятности излучения в 1 моду в dn раз, так что получим $dP_{sp} = p_{sp}VM(\nu)d\nu$. Чтобы получить P_{sp}, необходимо просуммировать элементарные плотности вероятности по всем частотам от 0 до ∞:

$$P_{sp} = \int_0^\infty p_{sp}VM(\nu)d\nu\,. \tag{1.11}$$

Поскольку моды в пространстве ориентированы произвольным образом, под p_{sp} в (1.11), учитывая (1.2), будем понимать $p_{sp} = \frac{c}{V}\bar{\sigma}(\nu)$, где $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{\max}$.

Используя выражения для p_{sp} и M, получим:

$$P_{sp} = c\int_0^\infty \bar{\sigma}(\nu)M(\nu)d\nu\,. \tag{1.12}$$

Интервал частот, где функция $\bar{\sigma}(\nu)$ отлична от нуля, расположен около частоты ν_0, и обычно мал на столько, что M в его пределах можно считать постоянной и равной $M(\nu_0)$. Или же можно вспомнить, что $\bar{\sigma}(\nu)=\bar{S}g(\nu)$, $\int_0^{\infty} g(\nu)d\nu=1$. Резкая обобщенная функция, обладающая аналогичным свойством – дельта-функция Дирака. Учитывая первое или второе соображение, получим:

$$P_{sp}=c\bar{S}M(\nu_0)=\frac{8\pi\bar{S}}{\lambda^2}, \quad (1.13)$$

где $\lambda=c/\nu_0$ – длина волны света в среде.

Определим понятие *время жизни, ограниченное спонтанным излучательным переходом* 2→1:

$$\frac{1}{t_{sp}}\equiv P_{sp}=M(\nu_0)c\bar{S}.$$

Плотность вероятности спонтанного перехода в *любую* моду:

$$P_{sp}=\frac{1}{t_{sp}}, \quad (1.14)$$

которая не зависит от объема резонатора. Скорости перехода 2→1 можно также выразить через t_{sp}:

$$\bar{S}=\frac{\lambda^2}{8\pi t_{sp}}. \quad (1.15)$$

Время t_{sp} обычно подлежит экспериментальному измерению. Важность формулы (1.15) состоит в том, что не всегда t_{sp} можно рассчитать теоретически (это требует знание квантово-механического поведения системы). Типичные значение t_{sp} имеют порядок 0,1 нс; возможны значения t_{sp} из интервала ограниченного временем порядка 1пс,10 с.

Сечение перехода также можно выразить через время жизни:

$$\bar{\sigma}(\nu) = \frac{\lambda^2}{8\pi t_{sp}} g(\nu). \tag{1.16}$$

Поскольку $g(\nu_0)$ обратно пропорционально ширине линии $\Delta\nu$, то максимальное сечение перехода $\bar{\sigma}(\nu_0)$ обратно пропорционально ширине линии.

C. Вынужденное излучение и поглощение

Переходы, индуцированные монохроматическим светом

Рассмотрим атом, бомбардируемый монохроматическим потоком фотонов. Пусть монохроматический свет имеет частоту ν, мощность потока составляет I (энергия, проходящая единицу нормально ориентированной площадки в единицу времени $= \left[\text{Дж}/\text{м}^2\,\text{с}\right]$). Средний поток фотонов, проходящий через единицу поверхности в секунду, составляет:

$$\phi = \frac{I}{h\nu} = \left[\frac{1}{\text{м}^2\,\text{с}}\right]. \tag{1.17}$$

Пусть резонансная частота атома равна ν_0. Определим плотность вероятности вынужденного излучения и поглощения $W_i = P_{ab} = P_{st}$.

В формулу (1.5) входит отношение числа фотонов в заданном объеме к самому объему n/V, найдем его для данного случая, считая поток ϕ известным. Представим себе цилиндр с основанием A, перпендикулярным волновому вектору **k** (то есть направлению распространения) светового потока. Направляющая цилиндра равна расстоянию, проходимому фотоном за время t. Объем такого цилиндра $V = Act$. Найдем, сколько фотонов войдет за время t в такой цилиндр. Поскольку поток фотонов постоянен, найденное n и будет искомым количеством фотонов, содержащимся в объеме. Из определения ϕ имеем:

$$\phi = \frac{d}{dt}\frac{dn}{dA}.$$

Величина $\frac{dn}{dA}$ от времени не зависит, поэтому интегрируя от 0 до t, получим:

$$\phi t = \frac{dn}{dA}.$$

Далее, поскольку поток распределяется по поверхности A равномерно, интегрируя по поверхности A, имеем:

$$n = A\phi t.$$

Таким образом, в произвольном объеме $V = Act$ через который проходит наш поток, содержится $n = A\phi t$ фотонов. Соотношение $\frac{n}{V} = \frac{\phi}{c}$. Учтя это, перепишем (1.5) в виде:

$$W_i = \phi\sigma(\nu). \qquad (1.18)$$

Уравнение (1.18) объясняет смысл функции $\sigma(\nu)$: это коэффициент пропорциональности между плотностью вероятности вынужденного перехода и величиной потока фотонов. Вспомним, что ϕ – поток фотонов, проходящий через единицу поверхности в секунду. С другой стороны, W_i – вероятность вынужденного перехода в секунду; выходит, с правой стороны должна быть величина, равная площади, через которую поток проходит. Из (1.18) следует, что такой величиной как раз и является *сечение перехода*. Оно может рассматриваться как эффективное сечение атома, которое ориентировано нормально к фотонному потоку и участвует во взаимодействии с индуцирующим излучением.

Промежуточные итоги. Спонтанное излучение усиливается множеством мод, в которые атом может излучать фотоны, *вне* *зависимости от того, есть ли там фотоны* или нет. Усилить вынужденное излучение могут лишь *моды, в которых имеются фотоны*. Значительного усиления вынужденного излучения можно достичь, положим, наличием большого количества фотонов, принадлежащих нескольким модам.

Переходы, индуцированные широкополосным светом

Рассмотрим атом, находящийся в полости объема *V*, в которой имеется многомодовый полихроматический свет, мощность которого распределена по частотам со спектральной плотностью $\rho(\nu) = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3\,\text{Гц}}\right]$. Пусть $\rho(\nu)$ такова, что ее можно считать более широкополосной в сравнении с шириной спектральной линии. Среднее количество фотонов в полосе частот $\nu \ldots \nu + d\nu$ равно $\rho(\nu)V\frac{d\nu}{h\nu}$. Каждая мода с вероятностью $\frac{c}{V}\sigma(\nu)$ в единицу времени может индуцировать переход атома. Полная вероятность поглощения или вынужденного излучения, таким образом:

$$W_i = \int_0^\infty \frac{\rho(\nu)V}{h\nu}\left[\frac{c}{V}\sigma(\nu)\right]d\nu\,. \tag{1.19}$$

Поскольку функция $\rho(\nu)$ широкополосная, (1.19) можно аппроксимировать:

$$W_i = \frac{\rho(\nu_0)}{h\nu_0}c\int_0^\infty \sigma(\nu)d\nu = \frac{\rho(\nu_0)}{h\nu_0}cS = \frac{\lambda^3}{8\pi h t_{sp}}\rho(\nu_0)\,, \tag{1.20}$$

где $\lambda = c/\nu_0$ – длина волны на резонансной частоте атома. Введем понятие среднего числа фотонов в моде:

$$\bar{n} = \frac{\lambda^3}{8\pi h}\rho(\nu_0)\,. \tag{1.21}$$

Название и смысл $\bar{n}$ обусловлены тем, что отношение

$$\frac{W_i}{P_{sp}} = \frac{\lambda^3 \rho(\nu_0)}{8\pi h t_{sp}} \frac{1}{M(\nu_0) c S} = \frac{\rho(\nu_0)}{h\nu_0 M(\nu_0)}. \qquad (1.22)$$

Величина $\frac{\rho(\nu_0)}{h\nu_0 M(\nu_0)}$ равна среднему количеству фотонов в единице объема вблизи частоты ν_0, в то время как $M(\nu_0)$ – количество мод в единичном объеме вблизи ν_0. Плотность вероятности W_i, таким образом, в $\bar{n}$ раз больше, чем для спонтанного излучения, поскольку мода содержит в среднем $\bar{n}$ фотонов.

Вероятность поглощения в принятых обозначениях равна:

$$W_i = \frac{\bar{n}}{t_{sp}}. \qquad (1.23)$$