Лабораторна робота №18

Обчислення рядів

Мета роботи: закріплення навичок побудови алгоритмів циклічної структури та використання функцій.

Зміст:

Короткі теоретичні відомості

Ряд Тейлора

Ряд Тейлора – це є розклад функції у нескінченну суму степеневих функцій.

Ряд названий на честь англійського математика Тейлора, хоча ряди були відомі задовго до публікацій Тейлора – їх використовували ще в XVII столітті Грегорі, а також Ньютон.

Ряди Тейлора застосовуються при апроксимації функції многочленами. Зокрема, лінеаризація рівнянь відбувається шляхом розкладання в ряд Тейлора і відсікання всіх членів вище першого порядку.

Нехай функція $f(x)$ нескінченно диференційована в деякій околиці точки a. Формальний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

називається рядом Тейлора функції f в околі a.

У разі якщо $a = 0$, цей ряд також називається рядом Маклорена.

Ряди Маклорена для деяких функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \qquad |x| < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right), \quad x \in [-1;1]$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \ldots, \quad x \in [-1;1]$$

Робоче завдання

Скласти програму, в якій реалізувати обчислення значення $y(x)$ для аргументу x, із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ (значення x та ε зчитуються з клавіатури) <u>не використовуючи функції стандартної бібліотеки</u>. Для цього:

1. Написати функцію користувача, яка реалізує обчислення необхідного ряду із заданою точністю.
2. Вивести результат обчислення $y(x)$ за допомогою функції користувача на екран.
3. Виконати обчислення $y(x)$ з використанням функцій стандартної бібліотеки, порівняти із раніш отриманим результатом.

Номер варіанта	$y(x)$
1	e^{2x^2}
2	$1+0.7\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$
3	$\mathrm{sh}\left(2x^2+3x\right)$
4	$\frac{1.8}{\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)+1.5}$
5	$\frac{e^{2x^3}-e^{3x^2}}{2}$
6	$\mathrm{sh}\left(x^2+3x-1\right)+\mathrm{sh}\left(3x^2+2x+3\right)$ (x має задовольняти умові $x<0.2$)
7	$e^{(0.5x^2-3x+1.7)}+5.4$
8	$\frac{5\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{7}$
9	$\frac{\mathrm{sh}\left(x^2+3x\right)+5}{\mathrm{sh}\left(2x^2-x\right)-3}$
10	$\frac{\mathrm{ch}\left(x^2+3x\right)+1}{\mathrm{ch}\left(x^2+3\right)-1}$
11	$\frac{e^{(0.5x^2-3x+1.7)}+1}{e^{(x^2-5x+2)}-1}$
12	$\frac{5}{\cos\left(\frac{3\pi x}{12}\right)+8}$
13	$e^{\left(x^2+4x+4\right)}+3e^{\left(2x^2+2x+1\right)}$
14	$\mathrm{sh}\left(x^2-3\right)+\frac{4}{\mathrm{sh}\left(x^2+3\right)}$
15	$1-0.5\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)$

16	$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi x}{12}\right)+5}{\sin\left(\frac{5\pi x}{8}\right)+3}$$
17	$$\mathrm{ch}\left(x^2-4\right)+\frac{3}{\mathrm{ch}\left(x^2+4\right)}$$
18	$$\frac{e^{2x^2}+e^{3x^3}}{e^{4x^4}}$$
19	$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi x}{12}\right)+0.8}{\cos\left(\frac{5\pi x}{12}\right)}$$
20	$$\mathrm{ch}\left(x^2+0.3\right)$$
21	$$\frac{e^{\left(x^2+1\right)}+1}{e^{\left(x^2-1\right)}-1}$$

Контрольні питання

1. Що таке ряд Тейлора?
2. Що таке ряд Маклорена?
3. Яким чином можна використовувати ряди Тейлора та Маклорена при програмуванні?