

7. ОСНОВИ АНАЛІЗУ БАГАТОВИМІРНИХ СИГНАЛІВ

7.1. Зображення як багатовимірні сигнали

В попередніх розділах мова йшла про сигнали, які були функціями одної змінної, як правило, часу $s(t)$. Такі сигнали називається одновимірними. До цього класу сигналів відносяться всі сигнали, які вимірюються з використанням одного вимірювального каналу. Багатовимірними називаються сигнали, значення яких залежить не від одної змінної, а від кількох. Найбільш розповсюдженим прикладом багатовимірного сигналу є зображення. В такому сигналі значення сигналу є функцією двох координат в просторі $I_1(x, y)$. Наприклад, якщо мова іде про сірошкальне зображення, то значення сигналу є яскравістю точки в просторі. Як правило, яскравість – число від 0 до 1, де 0 відповідає точці чорного кольору (відсутність яскравості), а 1 – відповідає точці білого кольору (максимальна яскравість). Проміжні значення між 0 та 1 говорять про насиченість кольору: 0.5 відповідає сірому кольору, 0.2 – темно-сірому, 0.8 – світло-сірому і т.д.

Всі методи аналізу та обробки одновимірних сигналів, які вивчалися до цього, можуть бути застосовані до багатовимірних сигналів, але з урахуванням залежності значення сигналів від більше ніж одної змінної.

Отримання, обробка та аналіз зображень розповсюджені в багатьох галузях науки і техніки, і набувають все більш широкого розвитку.

Застосування аналізу зображень:

- аналіз та обробка двовимірних зображень (фотографій) при стисненні, кодуванні, розпізнаванні об'єктів, покращенні якості зображень;
- аналіз та обробка рухомих зображень (відеопослідовностей) при стисненні відео, автоматичному контролі якості продукції, стеженні за транспортними засобами;
- біомедичні застосування (аналіз та розпізнавання зображень, які отримані в результаті УЗД, МРТ, КТ та ін. технік медичної інтроскопії).

Основні напрями досліджень з обробки та аналізу зображень:

- вивчення сприйняття зображень людиною та технічними системами;
- розробка та удосконалення техніки реєстрації зображень;
- розробка методів покращення якості зображень (підвищення контрастності, чіткості, позбавлення від шумів);
- розробка ефективних та швидких методів стиснення зображень;
- сегментація зображень (розділення зображення на складові частини);
- морфологічний аналіз та розпізнавання об'єктів на зображеннях.

Основними методами отримання зображень є такі:

- отримання зображень у видимому діапазоні довжин хвиль (фотографія, відеозйомка);
- термографія – в результаті вимірювання температурного поля отримують інфрачервоні зображення, які показують розподіл тепла по поверхні об'єкта. Зокрема, в медицині такі зображення використовуються при діагностуванні запалень, захворювань судин та онкологічних захворювань

шкіри. В електроніці методом термографії можна визначити області локального розігріву плати, мікросхеми або електронного чіпа;

– ультразвукова інтроскопія – при цьому система п'єзовипромінювачів генерує і передає в об'єкт ультразвукові імпульси. Ці звукові хвилі проходять скрізь об'єкт і на границях між областями із різним акустичним опором відбувається часткове віддзеркалення (частина хвилі повертається в бік зонду), частина затухає, а частина проходить далі, поки не досягнуть іншої границі і т.д. Віддзеркалені хвилі реєструються приймачем та передаються в комп'ютер, де на основі часу приходу кожного віддзеркаленого імпульсу та швидкості розповсюдження звуку в об'єкті розраховують відстань від зонду до границі розподілу. Обчислені відстані та інтенсивності будуються у вигляді зображення на дисплеї. Часто такі зображення будуються в реальному часі та, наприклад, дозволяють спостерігати за роботою серця чи активністю плоду;

– рентгенівська комп'ютерна томографія – при цьому дослідженні набір детекторів випромінювання та джерело рентгенівських променів розташовуються по кільцю, всередину якого поміщають об'єкт (наприклад, пацієнта). Кільце обертається навколо пацієнта, і випромінювання, яке пройшло через пацієнта, реєструється детекторами, що розташовуються на протилежному боці кільця. За допомогою математичного перетворення Радона можна побудувати зображення перерізу тіла пацієнта в площині кільця використовуючи інтенсивності випромінювання, яке пройшло через пацієнта. Цей процес відбувається неперервно при повороті кільця та при зміщенні кільця вздовж пацієнта (по спіралі). При зміщенні пацієнта вздовж вісі кільця отримують багато перерізів, які у сукупності утворюють тривимірне зображення;

– ядерно-магнітний резонанс або магнітно-резонансна томографія (ЯМР або МРТ) – при цьому дослідженні пацієнта поміщають в сильне постійне магнітне поле. Через його тіло пропускають радіохвилі у вигляді коротких імпульсів, на які реагують спіни електронів в атомах водню. У відповідь на радіоімпульси атоми водню в тканинах пацієнта випромінюють радіосигнали, сила та місце походження яких визначаються комп'ютерною системою обробки. В результаті будується тривимірне зображення тіла пацієнта;

– гамма-ізотопна візуалізація (однофотонна емісійна комп'ютерна томографія, ОФЕКТ) – при цьому пацієнту вводять радіоактивний ізотоп, розпад якого супроводжується гамма-випромінюванням. Це випромінювання реєструється детекторами, підсилюється та використовується для побудови тривимірних карт та будується зображення розподілу ізотопу в тілі. В основному цей метод використовують для знаходження ділянок патологій кісток, при інфекційних та онкологічних захворюваннях.

– позитронно-емісійна томографія – при ній пацієнту вводять радіоактивний ізотоп, розпад якого супроводжується позитронним випромінюванням. При зустрічі позитрона з електроном вони анігілюють з утворенням двох гамма-квантів. Результуюче гамма-випромінювання реєструється детекторами та формується томографічне зображення.

7.2. Представлення неперервних та дискретних зображень

З точки зору теорії сигналів, *зображення* – це функція двох змінних $I_1(x, y)$, де x та y – координати на площині.

Значення $I_1(x, y)$ в довільній точці площини називається *яскравістю* (інтенсивністю) або *рівнем сірого* для зображення. Як і у випадку одновимірних сигналів, $I_1(x, y)$ називається неперервним зображенням в разі, коли координати x та y можуть приймати довільні значення, а дискретним – в разі, коли x та y визначені лише для деякої множини значень. Можна провести дискретизацію зображень, якщо ввести поняття частоти дискретизації F_s або відповідного кроку дискретизації T_s . В загальному випадку, частота дискретизації може бути різною по різним координатам (x, y) : F_{sx} , F_{sy} (з відповідними кроками дискретизації T_{sx} , T_{sy}). Як правило, дискретизація зображень проводиться не в часовій області, а в просторовій, і частота дискретизації показує, скільки відліків зображення буде виміряне на одиницю довжини по кожній координаті. Розмірність частоти дискретизації в цьому випадку буде $\frac{1}{m}$, а крок дискретизації буде виражений в одиницях довжини.

Можна ввести двовимірний аналог одновимірної дельта-функції Дірака $\delta(t)$:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, y = 0, \\ 0, & x \neq 0, y \neq 0. \end{cases}$$

З її використанням дискретне зображення, яке буде отримано при дискретизації неперервного зображення $I(x, y)$ з кроками T_{sx} , T_{sy} можна отримати так:

$$I_1(x_n, y_m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_1(x, y) \delta(x - nT_{sx}, y - mT_{sy}).$$

Тут (x_n, y_m) – координати точки на зображенні, яка має інтенсивність $I_1(x_n, y_m)$.

Вводять також дискретний аналог функції Дірака для зображень:

$$\delta[k, l] = \begin{cases} 1, & k = 0, l = 0, \\ 0, & k \neq 0, l \neq 0. \end{cases}$$

З використанням цього виразу дискретизоване зображення можна записати так:

$$I_1[n, m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_1(x, y) \delta(k - n, l - m), \quad k, l \in Z.$$

Дискретне зображення задане своїми значеннями $I_1[n, m]$ в деяких точках площини. В реальних застосуваннях дискретне зображення містить скінченну кількість елементів, які називаються пікселями (pixel, від англійського picture

element – елемент зображення). В цьому випадку дискретна функція $I_1[n, m]$ має лише скінченну кількість значень:

$$I_1[n, m], \quad n = \overline{0, N-1}, \quad m = \overline{0, M-1}.$$

Таке зображення можна представити у вигляді матриці, кожний елемент якої дорівнює значенню яскравості відповідного пікселя:

$$I_1[n, m] = \begin{bmatrix} I_1[0,0] & I_1[0,1] & \dots & I_1[0, M-1] \\ I_1[1,0] & I_1[1,1] & \dots & I_1[1, M-1] \\ \vdots & & \ddots & \\ I_1[N-1,0] & I_1[N-1,1] & \dots & I_1[N-1, M-1] \end{bmatrix}.$$

Нумерація пікселів подвійна, перший індекс відповідає номеру рядка, другий – номеру стовпця. Лівий верхній піксель зображення має номер $[0,0]$. Всі методи аналізу та обробки зображень зводяться до математичних операцій над неперервною функцією $f(x, y)$, яка описує неперервне зображення, або над пікселями $I_1[n, m]$ (у випадку дискретного зображення).

Якщо значення яскравості кожного пікселя $I_1[n, m]$ може приймати лише значення 0 або 1, то таке зображення називається бінарним, і пікселі можуть бути тільки двох кольорів (як правило, чорного та білого). У випадку, коли значення $I_1[n, m]$ може бути дійсним числом від 0 до 1, то говорять, що таке зображення є сірошкальним (grayscale image), або зображенням в градаціях сірого.

Далі в цьому розділі будуть коротко розглянуті основні підходи до обробки та аналізу дискретних зображень.

7.2. Обробка зображень в просторовій області

Термін «просторова область» відноситься до площини, в якій задане зображення. При просторовій обробці всі методи маніпулюють безпосередньо величинами яскравостей пікселів зображення. Їх можна описати загальним виразом

$$I_2[n, m] = T(I_1[n, m]),$$

де T – деяке правило, яке ставить у відповідність кожному пікселю початкового зображення $I_1[n, m]$ відповідний піксель результуючого зображення $I_2[n, m]$, який отриманий в результаті обробки. Для отримання $I_2[n, m]$ може використовуватися не тільки значення пікселя $I_1[n, m]$, але також і інші пікселі в деякому околі $I_1[n \pm \Delta_n, m \pm \Delta_m]$. Як правило, це прямокутний або квадратний окіл.

При обробці зображення центр цього околу зміщують від пікселя до пікселя і проводять розрахунки для кожного центрального пікселя.

Градаційні перетворення зображень

Якщо для того, щоб отримати яскравість пікселя обробленого зображення, використовується яскравість лише одного пікселя початкового зображення, то говорять про градаційні перетворення. Іншими словами, обробка проводиться в околі розміром 1×1 піксель. Якщо яскравості пікселів початкового та результуючого зображення рівні відповідно $s_{nm} = I_1[n, m]$, та $r_{nm} = I_2[n, m]$, то можна записати, що

$$r_{nm} = T(s_{nm}).$$

Тут T описує залежність, яка пов'язує яскравості кожного пікселя початкового та результуючого зображення.

Нехай ми маємо сірошкальне зображення, яскравості пікселів якого лежать в межах від 0 до 1. На рисунку 7.1 наведені приклади деяких залежностей T . Перетворення яскравості згідно з кривою на рис. 7.1а не приведе до зміни яскравості пікселя, оскільки крива T переводить значення яскравості s_{nm} в таке саме значення r_{nm} . Якщо змінювати яскравість за кривою на рис. 7.1б, то зміни будуть помітні. Видно, що яскравості s_{nm} в околі нуля (дуже темні пікселі) будуть перетворені в пікселі r_{nm} нульової яскравості. Так само, дуже світлі пікселі (в з яскравостями близькими до 1) стануть білими (будуть мати яскравість 1). Достатньо вузький діапазон яскравостей початкового зображення s_{nm} від 0.4 до 0.6 (сірі пікселі) перетвориться на дуже широкий діапазон яскравостей в результуючому зображенні від 0.1 до 0.9, тобто розтягнеться. Це буде приводити до того, що деталі, які були на початковому зображенні сірими та слабко розрізнялися по кольору, будуть більш чітко видимі на зображенні після обробки.

При перетворенні за залежністю з рисунку 7.1в всі пікселі з яскравістю від 0 до 0.5 будуть мати яскравість 0, а пікселі з яскравістю більше 0.5 матимуть яскравість 1. Отже, зображення з сірошкального стане чорно-білим: пікселі темніші за сірий колір стануть чорними, а світліше за сірий – білими.

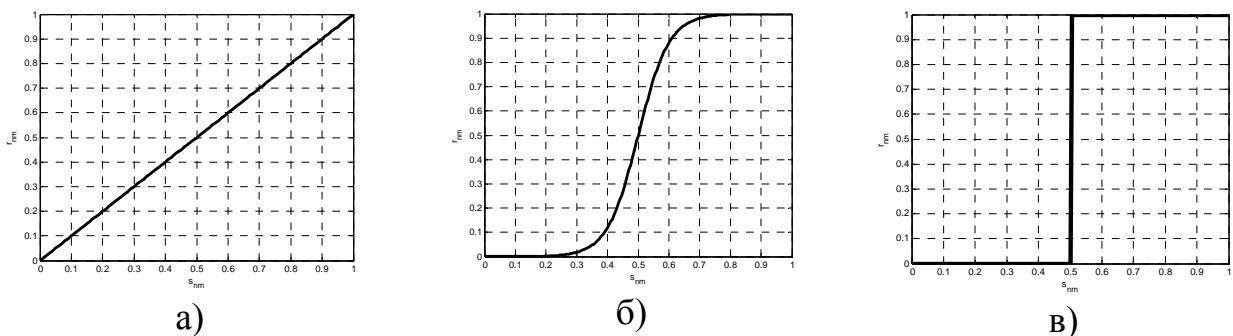


Рисунок 7.1 – Приклади залежностей T між яскравостями пікселів при градаційній обробці (пояснення в тексті)

Широковживаним видом градаційних перетворень є степеневі перетворення. При цьому яскравості пікселів результуючого та початкового зображення пов'язані за таким законом:

$$r_{nm} = c(s_{nm} + \varepsilon)^\gamma,$$

де c, ε, γ – деякі додатні константи.

Часто використовується більш проста залежність степеневого перетворення:

$$r_{nm} = c s_{nm}^\gamma.$$

Графіки для залежностей при різних показниках γ подані на рисунку 7.2.

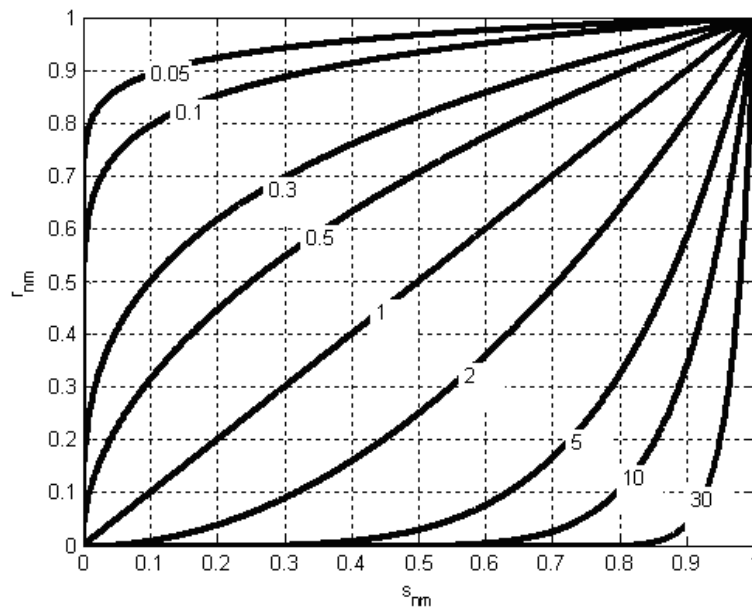


Рисунок 7.2 – Залежності між яскравостями пікселів вхідного та вихідного зображення при гамма-корекції для різних значень γ

Видно, що значеннях γ менше за одиницю, криві таких степеневих залежностей відображають вузький діапазон малих значень яскравостей пікселів вхідного зображення у широкий діапазон яскравостей пікселів результуючого зображення. Якщо значення показника степеню γ більше за одиницю, то відбувається протилежний ефект: вузький діапазон великих яскравостей відображається у широкий діапазон яскравостей пікселів результуючого зображення. Ця процедура називається *гамма-корекцією*.

Еквалізація гістограми

Гістограмою дискретного зображення називається дискретна функція $H(b_k) = \frac{N_k}{N}$, де b_k – k -им рівнем яскравості пікселя, N_k – кількість пікселів, які мають яскравість b_k , а N – кількість пікселів у всьому зображенні. Значення $H(b_k)$ є оцінкою імовірності появи пікселя яскравості b_k в зображенні.

Еквалізацію (лінеаризацію) гістограми проводять в тому випадку, коли в зображенні є багато пікселів зі схожими яскравостями, і мало пікселів з іншими яскравостями. На гістограмі ми будемо бачити, що на деяких проміжках яскравостей згруповано багато пікселів, в той час як деякі проміжки яскравостей майже не зайняті. При цьому деталі зображення, які зображені цими кольорами, складно розрізнити. Натомість існують такі проміжки яскравості, пікселів з якими взагалі немає на зображенні. Ці вільні проміжки яскравості можна «зайняти» для покращення якості зображення. Для цього роблять еквалізацію гістограм.

Якщо маємо піксель початкового зображення з яскравістю b_k , яка є k -им рівнем яскравості на гістограмі ($k = 0 \dots N-1$) то яскравість відповідного пікселя результуючого зображення буде розраховуватися

$$r_k = \sum_{p=0}^k H(b_p) = \sum_{p=0}^k \frac{N_p}{N}.$$

В результаті еквалізації гістограми яскравості пікселів на ній будуть розподілені рівномірно по всій шкалі яскравостей.

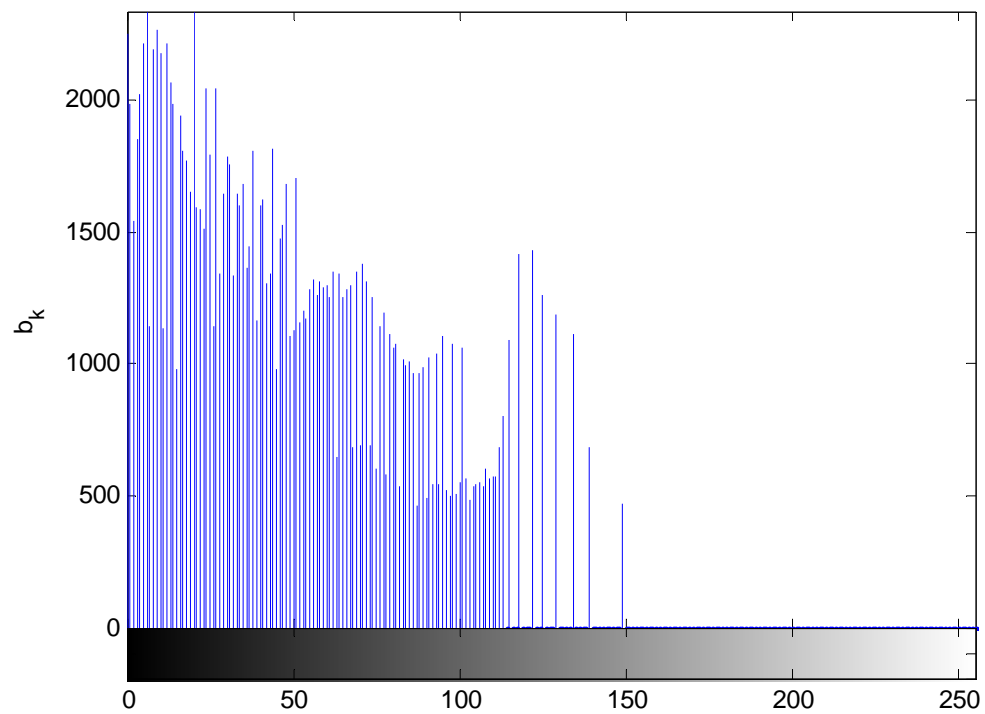
Наприклад, на рис. 7.3а наведене зображення, яке виглядає дуже темним. Дрібні деталі предметів та людей на ньому розрізнити складно, оскільки вони зображені схожими темними кольорами, які мало відрізняються один від одного. Гістограма цього зображення наведена на рис. 7.3б. На ній видно, що багато пікселів знаходяться в лівій частині шкали кольорів, що відповідає темним кольорам. Водночас, права частина шкали майже не зайнята, тобто світлих пікселів на зображенні немає. Цей вільний проміжок гістограми можна використати, щоб перенести туди яскравості деяких пікселів. Якщо гістограму цього зображення «розтягнути» на весь доступний діапазон яскравостей, то пікселі, які раніше мали дуже схожі кольори (їх яскравості знаходились близько на шкалі яскравостей), будуть віддалені один від одного на більшу величину яскравості.

Якщо подивитись на зображення, видно, що діапазон яскравостей пікселів, які присутні на зображенні, розширився: на зображенні тепер є і темні, і світлі пікселі (рис. 7.4а). Тепер стало легше розрізнити деталі зображення, оскільки вони зображені більш контрастно. На гістограмі видно, що з зображенні присутні пікселі всіх яскравостей, і весь діапазон яскравостей тепер зайнятий.

Перевагою еквалізації гістограм є те, що цей метод легко автоматизується і не вимагає задавання ніяких додаткових параметрів для отримання покращеного зображення. Розрахунки для еквалізації гістограм такою достатньо нескладні.

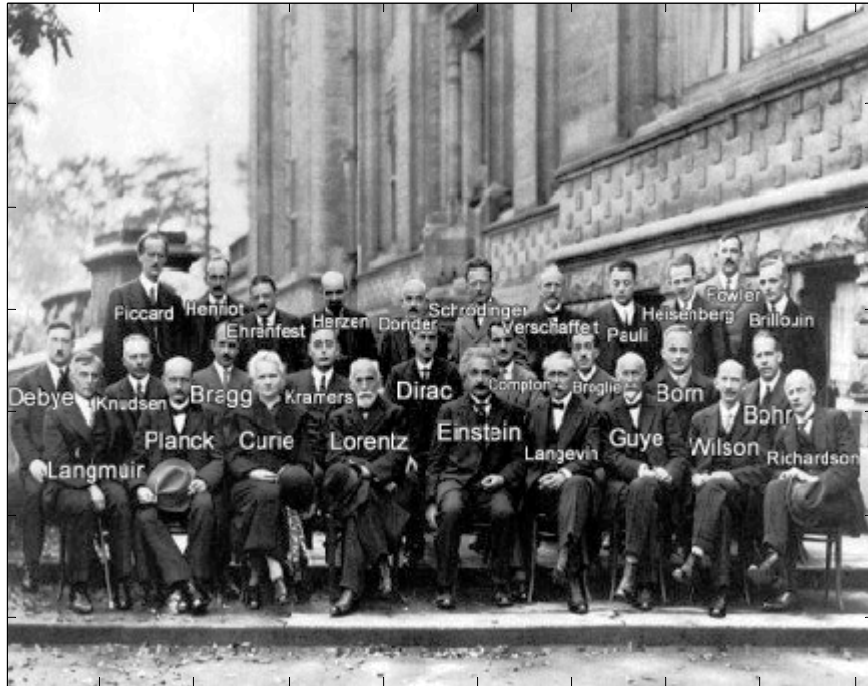


a)

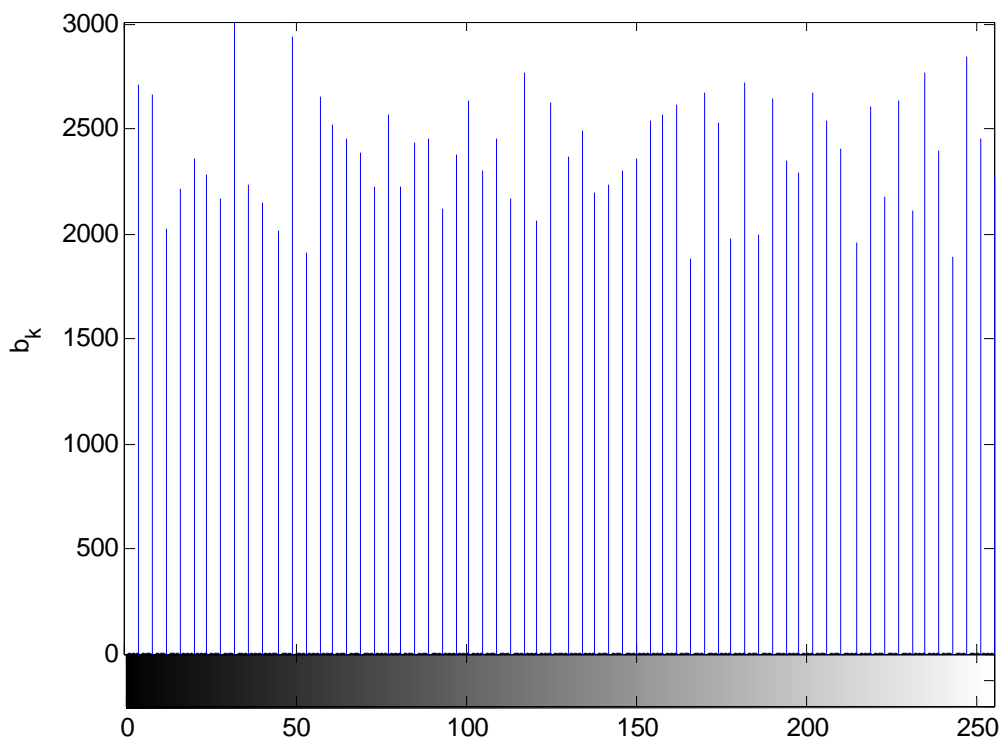


б)

Рисунок 7.3 – Початкове сірошкальне зображення (а) та його гістограма (б). градації сірого кольору кодуються числами від 0 до 255, оскільки для запису кольору пікселя використовується 8 біт



a)



б)

Рисунок 7.4 – Сіршкальне зображення (а) та його гістограма (б) після еквалізації

Просторова фільтрація

Просторова фільтрація зображень – це різновид обробки зображень в просторовій області, на відміну від класичного поняття «фільтрації», яка виконується із залученням спектральних характеристик фільтрів та спектрів зображень. При просторовій фільтрації для розрахунку яскравості пікселя результуючого зображення використовуються яскравості пікселів в деякому околі початкового зображення.

Схематично процес просторової фільтрації проілюстрований на рис. 7.5. Обробка виконується послідовно для кожного пікселя зображення. В початковому зображенні обирається окіл розміром 3×3 пікселя з центром в деякому пікселі $I_1[n, m]$. На основі значень яскравості пікселя $I_1[n, m]$ та його околу буде розрахована яскравість одного пікселя результуючого зображення $I_2[n, m]$. Для цього обирають «маску» коефіцієнтів, яка містить числа, на які мають смисл коефіцієнтів, з якими яскравість кожного пікселя з околу на початковому зображенні буде використана для отримання яскравості пікселя в результуючому зображенні. Розрахунок яскравості ведеться за формулою:

$$I_2[n, m] = c_{-1,-1}I_1[n-1, m-1] + c_{-1,0}I_1[n-1, m] + c_{-1,1}I_1[n-1, m+1] + \\ + c_{0,-1}I_1[n, m-1] + c_{0,0}I_1[n, m] + c_{0,1}I_1[n, m+1] + \\ + c_{1,-1}I_1[n+1, m-1] + c_{1,0}I_1[n+1, m] + c_{1,1}I_1[n+1, m+1].$$

Видно, що маска центрується в пікселі з номером $[n, m]$, і яскравість цього пікселя множиться на коефіцієнт $c_{0,0}$, що знаходиться в центрі маски.

При використанні маски розміром $A \times B$ (A і B повинні бути непарними) загальний вираз для отримання яскравості кожного пікселя результуючого зображення має вигляд:

$$I_2[n, m] = \frac{1}{C} \sum_{p=-A}^A \sum_{s=-B}^B c_{p,s} I_1[n+p, m+s] = \\ = \frac{\sum_{p=-A}^A \sum_{s=-B}^B c_{p,s} I_1[n+p, m+s]}{\sum_{p=-A}^A \sum_{s=-B}^B c_{p,s}}. \quad (7.1).$$

Константа C в попередньому вирази є нормувальним множником. Вона дорівнює сумі всіх коефіцієнтів маски, тому при діленні на неї сума коефіцієнтів при всіх яскравостях пікселів дорівнює одиниці. Це приводить до того, що яскравість пікселя відфільтрованого зображення буде не більше, ніж максимальна припустима для даного зображення яскравість. Нормувальний множник застосовується в тому випадку, якщо сума коефіцієнтів маски не дорівнює нулю.

При просторовій фільтрації з допомогою масок, вираз (7.1) повинен бути застосований по черзі для кожного пікселя початкового зображення. Треба мати на увазі, що при проходженні маски по краю зображення деякі пікселі

можуть бути відсутні. Тому розрахунок результуючих пікселів повинен виконуватися за особливою процедурою для уникнення крайових ефектів. При цьому зображення або дзеркально продовжується, або добудовується деякий окіл по краю зображення (наприклад, він заповнюється пікселями з нульовими або середніми яскравостями). Також можна не проводити розрахунок яскравостей для таких пікселів, але в цьому випадку розмір отриманого після фільтрації зображення буде меншим на два стовпця та два рядка.

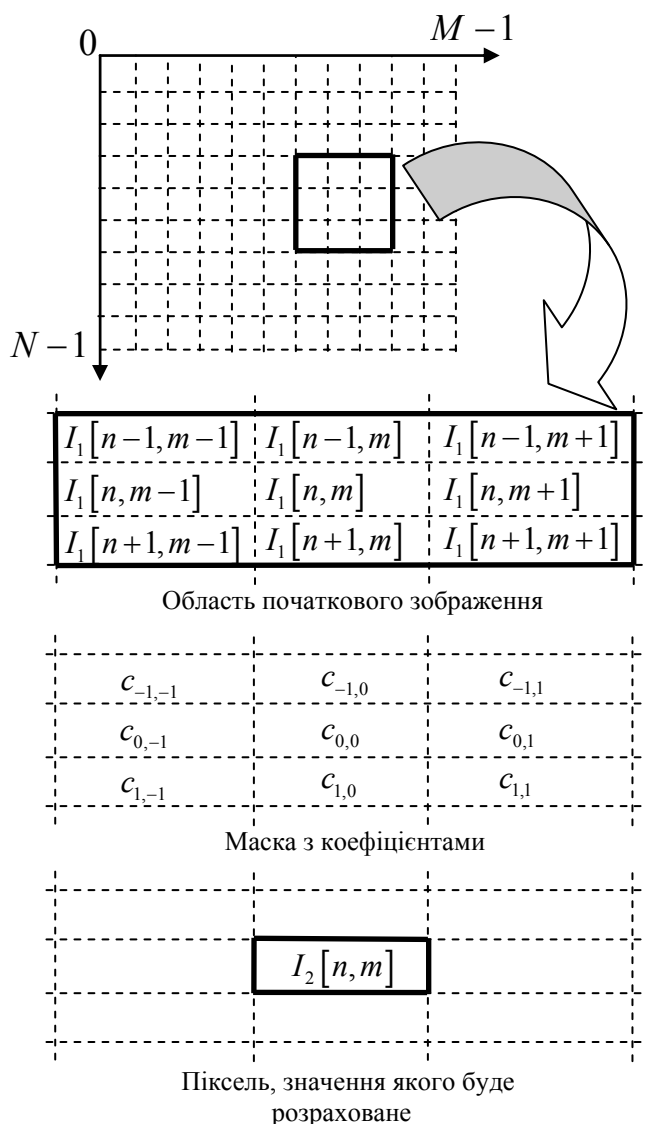


Рисунок 7.5 – Ілюстрація процесу просторової фільтрації

На рис. 7.6 наведені приклади масок, які часто використовуються на практиці. При використанні маски з рис. 7.5а виконується згладжування зображення, оскільки центральний піксель результуючого зображення буде мати яскравість, яка є середньою для околу відповідного пікселя на початковому зображенні. Маска на рис. 7.5б реалізує оператор Лапласа для зображення (взяття другої часткової похідної по двом напрямкам). Її застосування підкреслює розриви рівнів яскравостей на зображенні, і в результаті підвищується різкість наявних на зображенні границь. Послідовне використання двох масок з рис. 7.5в та 7.5г еквівалентне розрахунку градієнта

зображення; застосування цих масок ще називають оператором Собеля. Розрахунок градієнтів використовують для покращення видимості контурів на зображенні.

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{а)} & \text{б)} \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{в)} & \text{г)} \end{array}$$

Рисунок 7.6 – Приклади масок: а) згладжувальна; б) підвищення різкості; в) і г) оператор Собеля

Медіанна фільтрація

При медіанній фільтрації для отримання яскравості пікселя результуючого зображення використовується окіл відповідного пікселя початкового зображення. Із значень яскравостей пікселів околу отримують послідовність, в якій вони розташовані від найменшої до найбільшої. Для цієї послідовності знаходиться медіана, тобто визначається, який піксель знаходиться тому місці в послідовності, яке відповідає половині її довжини. Наприклад, якщо в околі 9 пікселів, то медіаною буде той піксель, який іде п'ятим у ранжованому ряді. Яскравість цього пікселя буде значенням яскравості пікселя відфільтрованого зображення.

7.3. Підхід до обробки зображень в частотній області

Аналогічно до того, як для одновимірного сигналу в часовій області можна знайти його спектральне представлення за Фур'є, можна знайти спектр зображення.

Якщо маємо неперервне зображення $I_1(x, y)$, то його спектр за Фур'є буде визначатися:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_1(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy, \quad (7.2)$$

де u, v – просторові частоти, $\frac{1}{M}$.

Обернене перетворення Фур'є для зображення:

$$I_1(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv. \quad (7.3)$$

Якщо зображення дискретне розмірністю $N \times M$, то аналоги формул (7.2) -(7.3) будуть мати вигляд:

$$F[k, p] = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} I_1[n, m] e^{-j2\pi \left(\frac{kn}{N} + \frac{pm}{M} \right)}, \quad (7.4)$$

$$I_1[n, m] = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} I_1[n, m] e^{j2\pi \left(\frac{kn}{N} + \frac{pm}{M} \right)}. \quad (7.5)$$

Тут k, p – номери гармонічних спектральних складових зображення, $k = \overline{0, N-1}$, $p = \overline{0, M-1}$.

Як і для одновимірного випадку, спектр дискретного зображення є періодичною функцією частот k, p з періодами, які дорівнюють розмірностям зображення: $F[k \pm qN, p \pm cM] = F[k, p]$ для цілих q, c .

Аналогічно до одновимірного випадку, для комплексного спектру зображення можна отримати амплітудний та фазовий спектри:

$$|F(u, v)| = \sqrt{\operatorname{Re}(F(u, v))^2 + \operatorname{Im}(F(u, v))^2},$$

$$\phi(u, v) = \arg(F(u, v)) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(F(u, v))}{\operatorname{Re}(F(u, v))}.$$

Фільтрація зображень в частотній області полягає у наступному. В двовимірній частотній області задається комплексна частотна характеристика фільтра $H(u, v)$. Як і для одновимірного випадку, можна створити фільтри нижніх (ФНЧ), верхніх (ФВЧ) частот, смугові (СФ) та загороджувальні (ЗФ) фільтри. Фільтрація зображення еквівалентна проходженню його через відповідний лінійний фільтр. В частотній області для того, щоб отримати спектр результуючого зображення $H(u, v)$, необхідно перемножити спектр початкового зображення $F_1(u, v)$ на КЧХ фільтра:

$$F_2(u, v) = H(u, v) \cdot F_1(u, v).$$

Для отримання відфільтрованого зображення необхідно виконати обернене перетворення Фур'є.

7.4. Підсумки до розділу 7 та рекомендована література

В цьому розділі стисло подані основи аналізу двовимірних сигналів – зображень. Зображення було представлено як функція, яка залежить від двох просторових змінних, і яка аналогічно до одновимірного випадку може бути неперервною і дискретною. Розглянуто два способи обробки зображень: в просторовій та частотній областях.

Прострова обробка – коли для отримання пікселів результуючого зображення виконуються математичні операції з одним або кількома пікселями початкового зображення; це зміна яскравостей пікселів, еквалізація гістограм або застосування масок. Обробка в частотній області – фільтрація зображення за допомогою фільтрів різних типів, яка приводить до зміни характеристик спектру зображень. Підбираючи типи фільтрів, якими будемо користуватись, та виконуючи апроксимацію їх частотних характеристик, після фільтрації можна

досягти зменшення рівня шумів. В розділі подані вирази для гістограмної та градаційної обробки зображень, а також вирази для прямого та оберненого перетворення Фур'є дискретного та неперервного зображення.

До тематик, які потребують значно більшого обсягу матеріалу і більш докладного вивчення, відносяться: обробка кольорових зображень, вейвлет-аналіз зображень, стиснення зображень, морфологічна обробка зображень, сегментація зображень. Також багато методів застосовується для обробки рухомих зображень (відео).

З початковими відомостями по цим тематикам можна ознайомитись в фундаментальній праці Р. Гонсалеса та Р. Вудса «Цифрова обробка зображень» [35]. З особливостями реалізації методів обробки та аналізу зображень в середовищі Матлаб можна ознайомитись в книзі Р.Гонсалес, Р.Вудс, С.Еддінс «Цифрова обробка зображень в середовищі Матлаб» [36].

7.5. Питання для самоперевірки

1. Які існують застосування обробки та аналізу зображень?
2. Як описуються неперервні та дискретні зображення?
3. В чому сутність градаційних перетворень зображень, як вони виконуються?
4. В чому сутність еквалізації гістограм зображень, як вона виконується?
5. В чому сутність просторової фільтрації, як вона виконується? Які можуть бути маски? Як можна врахувати крайові ефекти при роботі з маскою?
6. В чому сутність медіанної фільтрації, як вона виконується?
7. Записати вираз для прямого та оберненого перетворень Фур'є неперервних та дискретних зображень. Який фізичний зміст мають величини, які входять до цих виразів?
8. В чому сутність частотної фільтрації? Записати вираз для отримання спектру відфільтрованого зображення.