Лабораторна робота №2 (2години)

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Мета роботи: отримання практичних навичок розв'язання задач оптимізації, їх програмної реалізації в середовищі *Matlab.*

Короткі теоретичні відомості

Кожна людина час від часу опиняється в ситуації, коли досягнення певного результату може бути здійснено не єдиним способом. У таких випадках доводиться відшукувати найкращий спосіб. Однак у різних ситуаціях найкращими можуть бути зовсім різні розв'язки. Все залежить від обраного або заданого критерію. На практиці виявляється, що в більшості випадків поняття «найкращий» може бути виражене кількісними критеріями – мінімум витрат, мінімум часу, максимум прибутку і т.д. Тому можлива постановка математичних задач відшукання оптимального результату, так як принципових відмінностей у відшуканні найменшого чи найбільшого значення немає. Завдання на відшукання оптимального рішення називаються **завданнями оптимізації**. Оптимальний результат, як правило, знаходиться не відразу, а в результаті процесу, який називають **процесом оптимізації**. Застосовувані в процесі оптимізації методи отримали назву **методів оптимізації**. Щоб розв'язати практичну задачу треба перевести її на математичну мову, тобто скласти її математичну модель.

Найкращі в певному сенсі рішення задач прийнято називати **оптимальними**. Без використання принципів оптимізації в даний час не зважується жодна більш-менш складна проблема. Під час постановки й розв'язанні задач оптимізації виникають два питання: що і як оптимізувати?

Відповідь на перше питання виходить як результат глибокого вивчення проблеми, яку треба буде розв'язати. Виявляється той параметр, який визначає ступінь досконалості розв'язку проблеми. Цей параметр зазвичай називають **цільовою функцією** або **критерієм якості**. Далі встановлюється сукупність величин, які визначають цільову функцію. Нарешті, формулюються всі обмеження, які повинні враховуватися при розв'язанні задачі. Після цього будується математична модель, що полягає у встановленні аналітичної залежності цільової функції від усіх аргументів і аналітичної формулювання супутніх завданню обмежень. Далі приступають до пошуку відповіді на друге питання.

Таким чином задача оптимізації полягає у визначенні максимуму чи мінімуму (і відповідних аргументів) дійсної функції $f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ від n дійсних змінних у області D n-мірного простору. Іноді D збігається з усім n-вимірним простором; у цьому випадку задача називається безумовною.

Якщо ні, то задача має обмеження, тобто умови, що визначають область D. Зазвичай D визначається сукупністю нелінійних функцій, що задовольняють певні рівняння чи нерівності. Іншими словами, точка $\mathbf{X}$ n-мірного простору з координатами $\left(x_1, x_2, \dots x_n\right)$ належить D тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{X}$ задовольняє нерівності

$$g_i\left(\mathbf{X}\right) \geq 0, i = \overline{1,n},$$

де g_i – задані функції від $\mathbf{X}$.

Функцію $f\left(x_1, x_2, \dots x_n\right)$, що підлягає мінімізації, називають цільовою функцією. Методи обчислення мінімумів тривіально переносяться на задачу максимізації (оскільки мінімуми функції f є максимумами для $-f$).

Якщо функція f і всі обмеження g_i є лінійними функціями, то говорять про задачу лінійного програмування. У цьому випадку розв'язання лежить у вершині опуклого многогранника, описаного обмеженнями в n-мірному просторі. Звичайний метод розв'язання полягає в пошуку потрібної вершини переміщенням від наступної вершини до суміжної. Якщо функція f або яке-небудь з обмежень нелінійні, то кажуть про задачу нелінійного програмування.

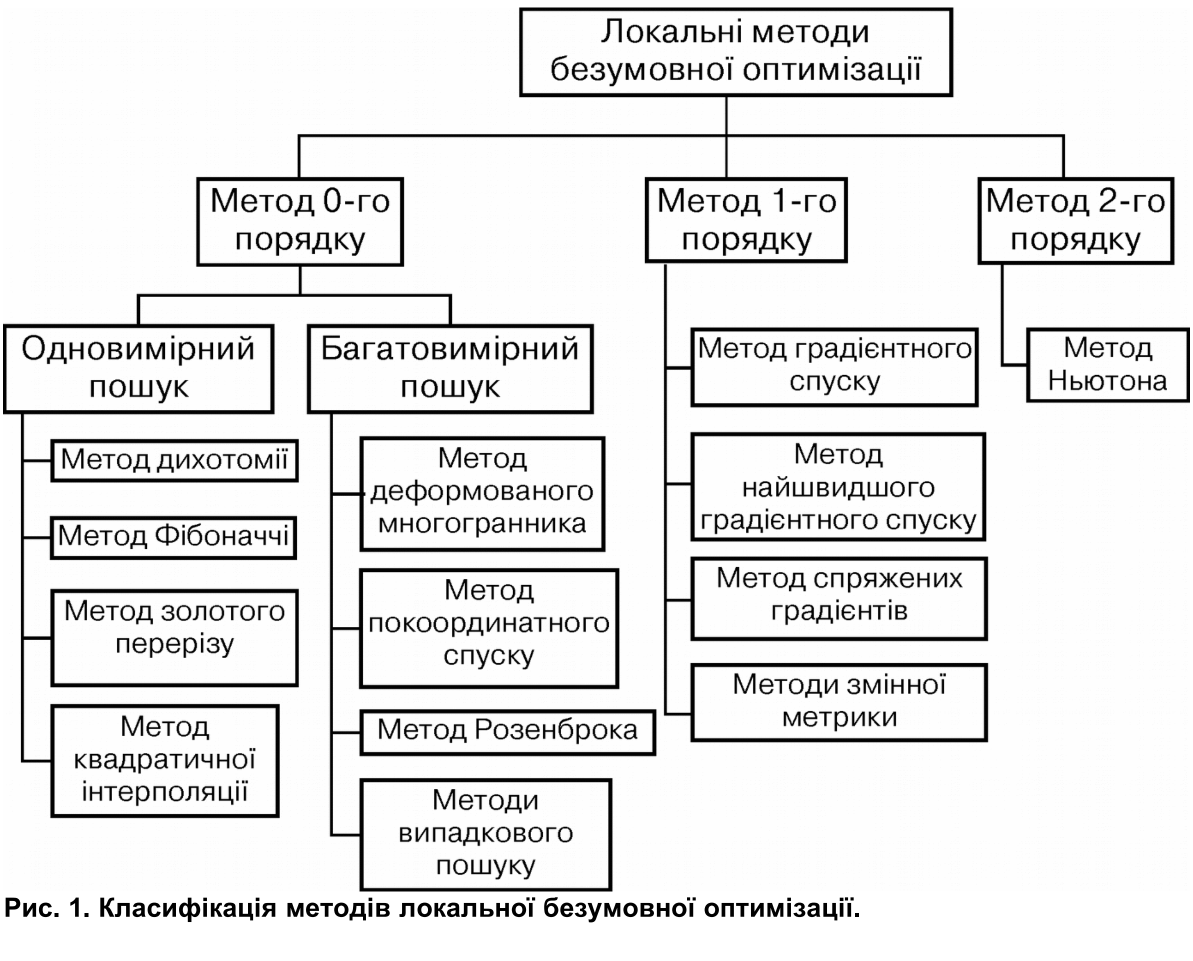

Рис. 1. Класифікація методів локальної безумовної оптимізації.

Залежно від порядку використовуваних похідних цільової функції методи безумовної оптимізації поділяють на методи 0-го, 1-го і 2-го порядків (Рис. 1).

Практично всі методи оптимізації прагнуть побудувати таку послідовність значень $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$…, за якої $f(\mathbf{X}_0) > f(\mathbf{X}_1) > f(\mathbf{X}_2) >$… У цьому випадку метод забезпечує збіжність і можна сподіватися, що мінімум функції буде знайдений. Алгоритми методів оптимізації наведено в [1].

В середовищі *Matlab* для чисельного розв'язання задач безумовної оптимізації найчастіше використовується функції *fminsearch* та *fminunc*. Функція *fminsearch* знаходить мінімум скалярної функції декількох змінних, починаючи з деякою початкової точки. Загалом, завдання належить до нелінійної оптимізації без обмежень. *fminsearch* використовує метод Нелдера — Міда, відомий ще як метод деформованого многогранника. Це метод нульового порядку, який не використовує чисельні або аналітичні значення градієнтів, а тільки розраховує значення цільової функції. Функція *fminunc* використовує градієнтні методи, або метод Ньютона, в залежності від параметрів функції.

Робоче завдання

1. У відповідності до варіанта вибрати одновимірну цільову функцію (див. табл. 2.1) та двовимірну цільову функцію (див. табл. 2.2).
2. Знайти мінімум одновимірної цільової функції та побудувати графік цільової функції в околі точки мінімуму. Маркером вказати розв'язок задачі.
3. Знайти мінімум двовимірної цільової функції та за допомогою функції *surf* побудувати її поверхню в околі точки мінімуму.

Зміст звіту:

1. Назва роботи.
2. Мета.
3. Цільові функції.
4. Робоче завдання.
5. Лістинг робочої програми.
6. Результати розрахунків та графіки.
7. Висновки.

Таблиця 2.1.

Варіанти завдань для одновимірної цільової функції

Номер бригади	Задача	Номер бригади	Задача
1	$x^4 - 4x^2$	**2**	$x^4 - x$
3	$x^3 - x$	**4**	$-x^3 + x$
5	$x^3 - 3x^2$	**6**	$-x^3 + 3x^2$
7	$-x^3 + 3x$	**8**	$x^3 - 3x$
9	$x^2 - x$	**10**	$x^4 + 3x$
11	$x^4 - 3x$	**12**	$\sin\left(x^2\right)$
13	$\cos\left(x^2\right)$	**14**	$\sin(x)/x$
15	$-\sin^2(x)$	**16**	$-\sin^2\left(x\right)e^x$
17	$\left(\cos\left(x\right)-1\right)/x$	**18**	$5\,\mathrm{ch}(x)$
19	$\mathrm{sh}\left(x\right) - x^2$	**20**	$\mathrm{sh}(x-1)/\left(x-1\right)$
21	$\cosh\left(x\right) - x^2$	**22**	$x^2 - \mathrm{sh}(x)$
23	$\mathrm{ch}\left(x\right) - 2x$	**24**	$\mathrm{Re}\left(x^x\right)$
25	$x^2 - \ln\left(x\right)$	**26**	$-e^{\left(-x^2\right)}$
27	$5e^{(-x)}\sin\left(x\right)$	**28**	$2x/\left(x^2+1\right)$
29	$-0{,}2x^5 + x + 4$	**30**	$x^4 - 2x^3 - 1$

Таблиця 4.2.

Варіанти завдань для двовимірної цільової функції

Номер бригади	Задача	Номер бригади	Задача
1	$\left(2-2x_1-x_2^2\right)^2+\left(x_1+x_2-1\right)^2$	**2**	$\left(x_1-2x_2+2\right)^2+\left(4x_1^2-x_2+1\right)^2$
3	$\left(x_1-x_2-2\right)^4+\left(2x_1^2+x_2-1\right)^2$	**4**	$\left(\dfrac{6x_1}{x_2+5}+1\right)^2+\left(2x_2-x_1-3\right)^2$
5	$\left(2x_1+x_2+1\right)^2+\left(\dfrac{8x_2}{x_1+4}+2\right)^2$	**6**	$\left(x_1+\dfrac{x_2}{4}+1\right)^2+\left(x_1+x_2+1\right)^4$
7	$\left(2-x_1x_2\right)^2+\left(x_1+2x_2-5\right)^2$	**8**	$\left(2x_1-x_2-3\right)^2+\left(\dfrac{x_1x_2}{2}-1\right)^2$
9	$\left(x_1^2-x_2+1\right)^2+\dfrac{\left(3x_1+x_2+1\right)^2}{2}$	**10**	$\left(x_1-4x_2^2+2\right)^2+\left(x_1-x_2-3\right)^2$
11	$\left(2x_1-x_2-4\right)^4+\left(x_1+x_2-2\right)^2$	**12**	$\left(\dfrac{x_1-4}{x_2+2}+1\right)^2+\left(x_1+2x_2-4\right)^2$
13	$\left(x_1+x_2+2\right)^2+\left(\dfrac{x_2+2}{x_1+4}-1\right)^2$	**14**	$\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}+1\right)^2+\left(x_1-x_2-2\right)^4$
15	$\left(x_1x_2+3\right)^2+\left(x_1+x_2-2\right)^2$	**16**	$\left(2x_1+3x_2-7\right)^2+\left(x_1x_2-x_1+2\right)^2$
17	$\left(x_1-x_2^2+8\right)^2+\left(x_1+x_2-4\right)^2$	**18**	$\left(x_1-2x_2-1\right)^2+\left(x_1^2-4x_2-5\right)^2$
19	$\left(2x_1-x_2-6\right)^4+\left(x_1+2x_2+2\right)^2$	**20**	$\left(\dfrac{5x_1}{x_2+3}+2\right)^2+\left(2x_2-x_1-6\right)^2$
21	$\left(x_1-x_2+3\right)^2+\left(\dfrac{4x_2}{x_1-2}+1\right)^2$	**22**	$\left(x_1+x_2+1\right)^2+\left(x_1-x_2-3\right)^4$
23	$\left(3+x_1x_2\right)^2+\left(2x_1+x_2+5\right)^2$	**24**	$\left(x_1-x_2-4\right)^2+\left(x_1x_2+2x_1+1\right)^2$
25	$\left(x_1^2-x_2+3\right)^2+\dfrac{\left(3x_1+x_2-3\right)^2}{2}$	**26**	$\left(2x_1-x_2^2-6\right)^2+\left(x_1+2x_2-3\right)^2$
27	$\left(x_1-x_2+1\right)^4+\left(x_1+x_2-5\right)^2$	**28**	$\left(\dfrac{x_1+1}{x_2+2}-1\right)^2+\left(x_1-2x_2+1\right)^2$
29	$\left(2x_1+x_2+1\right)^2+\left(\dfrac{x_2+1}{x_1-2}+1\right)^2$	**30**	$\left(x_1+x_2-1\right)^2+\left(x_1-x_2-5\right)^4$

Література

1. Прокопенко Ю.В. Обчислювальна математика // Ю.В.Прокопенко, Д.Д.Татарчук, В.А.Казміренко .– К. НТУУ «КПІ», 2013.– 224с.– Бібліогр. : с.222-224.– ISBN:978-966-622-590-3.