

Інтегрування функцій

Мета роботи: одержання практичних навичок побудови та використання алгоритмів інтегрування функцій, їх програмної реалізації на комп'ютері, оцінки похибки розв'язку, порівняння ефективності квадратурних формул різних порядків.

Стислі теоретичні відомості

Задача чисельного інтегрування полягає в знаходженні наближеного значення інтеграла :

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

де $f(x)$ — задана функція. Для розв'язання цієї задачі відрізок $[a, b]$ зазвичай розбивається на n елементарних відрізків точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ і шукане значення інтеграла замінюється сумою:

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx. \quad (1)$$

На кожному елементарному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ вводиться сітка $x_i = \xi_{i0} < \xi_{i1} < \dots < \xi_{im} = x_{i+1}$ і наближеним значенням інтеграла вважається число:

$$I_i = h_i \sum_{j=0}^m C_j f(\xi_{ij}), \quad (2)$$

де $f(\xi_{ij})$ — значення функції $f(x)$ у вузлах $x = \xi_{ij}$, C_j — вагові множники (ваги), які залежать тільки від вузлів, але не залежать від вибору $f(x)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Для чисельного наближення визначених інтегралів часто використовується термін квадратура, щоб уникнути плутанини із чисельним інтегруванням звичайних диференціальних рівнянь. Тому формулу (2) називають квадратурною формулою. Число m називають порядком квадратурної формули. Точки ξ_{ij} називають вузлами, а числа C_j коефіцієнтами (вагами) квадратурної формули.

Якщо похибку квадратурної формули на елементарному відрізку можна оцінити як:

$$R_i = a_i f^{(p)}(\Theta) h_i^{p+1},$$

де a_i — константа, $\Theta \in [x_i, x_{i+1}]$, то число p називають порядком точності методу на всьому відрізку інтегрування.

Оскільки квадратурна формула (2) повинна бути справедлива для будь-якої функції, в тому числі і для функції $f(x) \equiv 1$, то із (2) випливає:

$$\sum_{j=0}^m C_j = 1. \quad (3)$$

Найчастіше використовуються квадратурні формули Ньютона-Котеса. Це сімейство формул, які отримують шляхом інтегруванням інтерполяційних поліномів, побудованих на сітці з рівновіддаленими вузлами.

Розрізняють два типи формул Ньютона-Котеса: формули замкнутого типу і формули відкритого типу. В формулах замкнутого типу інтерполяційний поліном

проходить через крайні точки відрізка $[x_i, x_{i+1}]$, а в формулах відкритого типу хоча б одна із точок x_i або x_{i+1} не є вузлом інтерполяційного поліному. Так, наприклад, формули трапецій і Сімпсона є формулами Ньютона-Котеса замкнутого типу, а формула прямокутників — відкритого типу.

В формулах Ньютона-Котеса m -го порядку закритого типу вагові коефіцієнти розраховуються за формулою:

$$C_j = \frac{(-1)^{m-j}}{j!(m-j)!} \frac{1}{m} \int_0^m \prod_{k=0, k \neq j}^m (t-k) dt. \quad (4)$$

Із (4) випливає, що

$$C_j = C_{m-j}, \quad (5)$$

тобто коефіцієнти Котеса симетричні відносно центру елементарного відрізка.

Похибка формули Ньютона-Котеса може бути оцінена як:

$$R_i = \begin{cases} a_i f^{(m+2)}(\xi_i) h_i^{m+3}, & m = 2l \\ a_i f^{(m+1)}(\xi_i) h_i^{m+2}, & m = 2l - 1 \end{cases}, l = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

де $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

Із оцінки (6) випливає, що для зменшення похибки квадратурної формули Ньютона-Котеса необхідно збільшувати її порядок. Однак формули з $m \geq 10$ рідко використовуються через їх чисельну нестійкість, що призводить до різкого зростання обчислювальної похибки. Причиною такої нестійкості є те, що коефіцієнти C_j для великих m мають різні знаки. Деякі коефіцієнти стають від'ємними для $m=8$. Для $m=9$ всі вони додатні, але для $m \geq 10$ існують як додатні, так і від'ємні значення.

Оскільки обчислювальна похибка обчислення інтегралу дорівнює:

$$\Delta I = \sum_{j=0}^m C_j \Delta f_{i,j},$$

то

$$|\Delta I| \leq \sum_{j=0}^m |C_j| |\Delta f_{i,j}|.$$

Якщо всі C_j додатні, то у відповідності з (3) $\sum_{j=0}^m |C_j| = 1$. Тоді,

$$|\Delta I| \leq \sum_{j=0}^m |C_j| |\Delta f_{i,j}| \leq \max_{0 \leq j \leq m} |\Delta f_{i,j}| \sum_{j=0}^m |C_j| = \max_{0 \leq j \leq m} |\Delta f_{i,j}|.$$

Отже, похибка обчислення квадратури має такий же порядок, що і похибка обчислення функції. В цьому випадку говорять, що сума (2) обчислюється стійко. Якщо C_j мають різні знаки, то може виявитися, що сума $\sum_{j=0}^m |C_j|$ може зростати із зростанням m , отже, збільшується похибка обчислення квадратури.

Коефіцієнти і залишкові члени формул Ньютона-Котеса перших 10-ти порядків наведені в таблиці 1. При цьому коефіцієнти Котеса розраховуються по формулі:

$$C_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{i=0}^m \alpha_i}. \quad (7)$$

Для визначення відсутніх коефіцієнтів слід скористатися властивістю (5).

Для зменшення обчислювальних похибок бажано уникати безпосереднього обчислення коефіцієнтів Котеса за формулою (7), а доцільно переписати вираз (2) у вигляді:

$$I_i = \frac{h_i}{\sum_{i=0}^m \alpha_i} \sum_{j=0}^m \alpha_j f(\xi_{ij}),$$

причому ділення на $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ можна провести тільки під час повернення значення обчисленої квадратури. Слід відмітити, що оскільки всі α_i являються цілими числами, то для їх зберігання слід використовувати тільки цілі типи. Це дозволить зменшити накопичувану похибку округлення.

Для оцінки досягнутої похибки можна скористатися правилом Рунге. Для цього обчислення квадратури необхідно провести двічі із кроками h і $\frac{h}{2}$. При цьому оцінка досягнутої відносної похибки може бути обчислена за формулою

$$R = \frac{1}{(2^p - 1)} \left| \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{I_{\frac{h}{2}}} \right|, \quad (8)$$

де $I_{\frac{h}{2}}, I_h$ — обчислене значення інтегралів з кроком $\frac{h}{2}$ і h , p — порядок точності методу на всьому відрізку інтегрування.

Якщо досягнута похибка R виявиться більшою, ніж задана ε , то крок інтегрування необхідно зменшити (наприклад, вдвічі) і знову оцінити похибку. Подрібнення кроку слід проводити до тих пір, поки не виконається умова $R < \varepsilon$.

В середовищі *Matlab* для чисельного обчислення інтегралів використовуються функції *quad*, *integral* та *quadl*.

Слід зазначити, що квадратурні формули є справедливими тільки для неперервних підінтегральних функцій. Якщо ж підінтегральна функція має розриви, то інтеграл слід розрахувати як суму інтегралів, що розраховано на відрізках неперервності функції. Так наприклад для підінтегральної функції, що наведено на рис. 1, інтеграл на відрізку $x \in [a, b]$ слід розраховувати за формулою:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_{1-}} f(x) dx + \int_{x_{1+}}^b f(x) dx,$$

де x_{1-}, x_{1+} — точки відповідно зліва і справа від точки розриву x_1 .

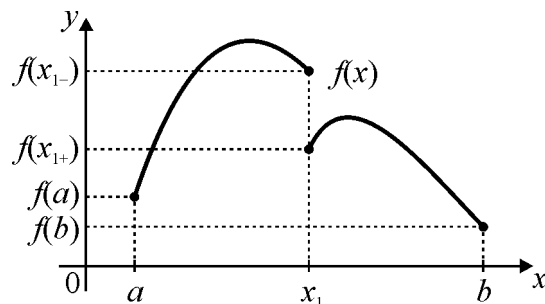


Рис. 1. Підінтегральна функція з розривом першого роду.

Таблиця 1. Сталі для розрахунку коефіцієнтів Котеса і похибки формули Ньютона-Котеса порядку m на елементарному відрізку

m	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\sum_{i=0}^m \alpha_i$	R_i
1	1	1					2	$-\frac{1}{12}h_i^3 f'''(\xi)$
2	1	4	1				6	$-\frac{1}{90 \cdot 2^5} h_i^5 f^{IV}(\xi)$
3	1	3	3	1			8	$-\frac{3}{80 \cdot 3^5} h_i^5 f^{IV}(\xi)$
4	7	32	12	32	7		90	$-\frac{8}{945 \cdot 4^7} h_i^7 f^{VI}(\xi)$
5	19	75	50	50	75	19	288	$-\frac{275}{12096 \cdot 5^7} h_i^7 f^{VI}(\xi)$
6	41	216	27	272	27	216	840	$-\frac{9}{1400 \cdot 6^9} h_i^9 f^{VIII}(\xi)$
7	751	3577	1323	2989	2989	1323	17280	$-\frac{8183}{518400 \cdot 7^9} h_i^9 f^{VIII}(\xi)$
8	989	5888	-928	10496	-4540	10496	28350	$\sim h_i^{11} f^X(\xi)$
9	2857	15741	1080	19344	5778	5778	89600	$\sim h_i^{11} f^X(\xi)$
10	16067	106300	-48525	272400	-260550	427368	598752	$\sim h_i^{13} f^{XII}(\xi)$

Робоче завдання

1. Побудувати алгоритми чисельного інтегрування функцій із використанням квадратурних формул Ньютона-Котеса 4, 5 і 8 порядків із автоматичним вибором кроку інтегрування для досягнення результату із заданою відносною похибкою ε .
2. Скласти робочу програму із використанням універсальних функцій для чисельного інтегрування. Формальні параметри функцій інтегрування повинні містити ім'я підінтегральної функції, границі відрізка інтегрування, відносну похибку обчислення інтеграла. Слід передбачити можливість обмеження максимального числа елементарних відрізків або мінімальної довжини елементарного відрізка.
3. Набрати і налагодити програму на комп'ютері. Налаштування здійснити із використанням в якості підінтегральної функції поліномів степеня $p-1$, де p — порядок точності методу на всьому відрізку інтегрування.
4. Провести обчислення інтегралів функцій, заданих в табл. 2, використовуючи квадратурні формули Ньютона-Котеса 4, 5 і 8 порядків, з підрахунком числа елементарних відрізків і потрібного числа звернень до підінтегральної функції, необхідних для досягнення заданої похибки.
5. Порівняти методи різних порядків за ефективністю.
6. За допомогою інтеграла суперпозиції:

$$y(t) = s(\tau_{p+})h(t - \tau_{p+}) + \int_{\tau_{p+}}^t \frac{ds(\tau)}{d\tau} h(t - \tau) d\tau - s(\tau_{p-})h(t - \tau_{p-}), \quad (9)$$

визначити реакцію системи, показану на рис. 2, на кожному з трьох вхідних дій:

$$6.1 \quad s(t) = \begin{cases} A \cdot \sin(\omega t + \varphi), & t \in \left[0; \frac{\pi}{\omega}\right] \\ 0, & t \notin \left[0; \frac{\pi}{\omega}\right], \quad t_{\max} > \frac{\pi}{\omega}; \end{cases}$$

$$6.2 \quad s(t) = A \cdot e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\sigma^2}}, \quad t_{\max} > t_0 + 3\sigma;$$

6.3 наведений на рис. 3, $t_{\max} > 4$,

і побудувати відповідні графіки на відрізку $t \in [0, t_{\max}]$ в одній системі координат з $s(t)$.

Тут:

$h(t)$ — перехідна характеристика схеми. Її слід визначити аналітично по методиці, викладеній в курсі теорії електричних кіл;

$s(t)$ — вхідна дія;

τ_{p+} та τ_{p-} визначають ліву та праву границі інтервалу неперервності підінтегральної функції. Якщо функція є неперервною на відрізку $[0, t_{\max}]$, то $\tau_{p+} = 0$, $\tau_{p-} = t_{\max}$. Якщо ж функція має розриви, то реакція схеми є суперпозицією формул (9) на всіх інтервалах неперервності, враховуючи, що перехідна характеристика від від'ємного аргументу та інтеграл в формулі (9), якщо $t < \tau_{p+}$, дорівнюють нулю.

Всі опори дані в Омах, струми — в Амперах, ємності — в Фарадах, індуктивності — в Генрі, кругові частоти — в рад/с, фази — в радіанах, час — в секундах.

7. Виконати п. 4 в середовищі *Matlab*, використовуючи внутрішні функції. Порівняти результати з тими, що отримані в п. 4.
8. Виконати п. 6 в середовищі *Matlab*, використовуючи внутрішні функції. Порівняти результати з тими, що отримані в п. 6.
9. Побудувати графіки залежностей, які отримано в п. 6 та 8 (вхідний і вихідний сигнал в одній системі координат).

Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета.
3. Робоче завдання.
4. Математичне формулювання алгоритмів чисельного інтегрування.
5. Текст робочої програми.
6. Результати розрахунків із підрахуванням числа необхідних розбиттів заданого відрізка на елементарні і кількості звертань до підінтегральної функції, необхідних для обчислення інтегралів методом Ньютона-Котеса 4, 5 та 8 порядків.
7. Графіки отриманих залежностей (вхідний і вихідний сигнал в одній системі координат).
8. Висновки.

Варіанти завдань

Таблиця 2

Номер бригади	Підінтегральна функція	Межі інтегрування		Відносна похибка ε	№ схеми/ № сигналу	A	ω, φ	t_0, σ
		a	B					
1	$\frac{\sin x^2}{x^2}$	0	π	10^{-6}	1/1	1	2π $\pi/6$	4 1
2	$\frac{e^{\sin x}}{1 + \cos x}$	$-\pi/2$	$\pi/2$	10^{-6}	1/2	1	2π $\pi/4$	5 1
3	$\frac{\ln(2 - \sin x)}{0.1 + \operatorname{tg}^2 x}$	0	$\frac{\pi}{2.5}$	10^{-6}	1/3	1	2π $\pi/3$	6 1
4	$\frac{\sin x^2}{1 - \cos x}$	0	π	10^{-6}	1/4	1	2π $\pi/2$	7 1
5	$\frac{\cos x^3}{1.1 - \sin x^2}$	0	1	10^{-6}	2/1	2	2π $-\pi/6$	7 2
6	$\frac{e^{\sqrt{x}}}{3 - \sin x}$	0	5π	10^{-6}	2/2	2	2π $-\pi/4$	8 1
7	$\frac{1 - \cos x^2}{\sin \sqrt{x}}$	0	π	10^{-5}	2/3	2	2π $-\pi/3$	8 2
8	$\frac{\sin x^2}{\sqrt[3]{1 - \cos \sqrt{x}}}$	0	2π	10^{-5}	2/4	2	2π $-\pi/2$	9 1
9	$\frac{1 - \cos x^3}{\sin \ln(1 + x)}$	0	1	10^{-6}	3/1	3	3π $\pi/6$	9 2
10	$\frac{\sin x^4}{1 - \cos \ln(1 + x)}$	0	1	10^{-6}	3/2	3	3π $\pi/4$	9 3
11	$\frac{1 - \cos x}{x^2}$	0	6π	10^{-6}	3/3	3	3π $\pi/3$	10 1
12	$(1 + x)e^{-x^2}$	0	4	10^{-6}	3/4	3	3π $\pi/2$	10 2
13	$\frac{e^{\cos x}}{1 + \sin x}$	0	1.1π	10^{-6}	4/1	4	3π $-\pi/6$	2 1
14	$\frac{\sin x^2}{2 - \cos x}$	0	π	10^{-6}	4/2	4	3π $-\pi/4$	10 3
15	$\frac{1 - \cos x}{x}$	0	6π	10^{-6}	4/3	4	3π $-\pi/3$	11 2
16	$\frac{\sin^2 x}{x^2}$	0	6π	10^{-6}	4/4	4	3π $-\pi/2$	11 2

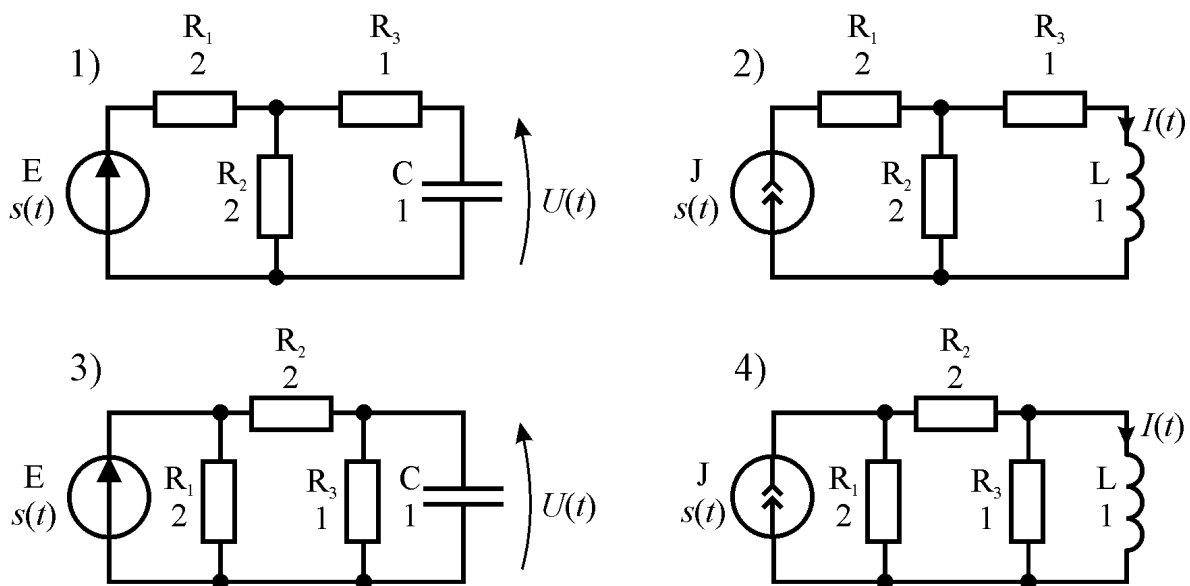


Рис. 2. Електрична схема для задач 6.1, 6.2, 6.3.

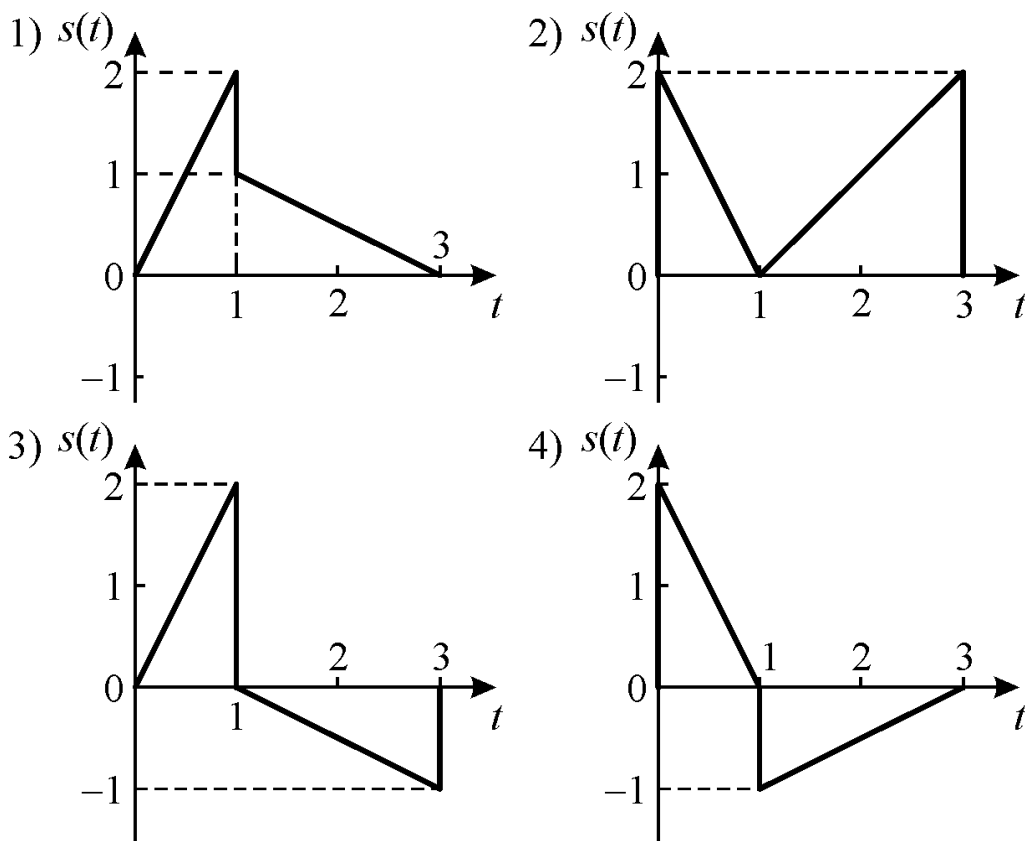


Рис. 3. Форма вхідної дії для задачі 6.3.