

## Чисельне розв'язання задачі Коші для системи жорстких диференціальних рівнянь

Мета роботи: отримання практичних навичок побудови алгоритмів чисельного розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь, оцінки похибки розв'язку, автоматичного вибору кроку інтегрування, програмної реалізації алгоритмів на комп'ютері, порівняння ефективності різних методів.

### Короткі теоретичні відомості

Під задачею Коші для системи із  $n$  диференціальних рівнянь розуміють задачу:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0, \quad (2)$$

де  $\mathbf{Y} = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$  –  $n$ -мірний вектор невідомих функцій, що підлягають визначенню,  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) = [f_1(t, \mathbf{Y}), f_2(t, \mathbf{Y}), \dots, f_n(t, \mathbf{Y})]^T$  –  $n$ -мірний вектор значень похідних,  $\mathbf{Y}_0 = [y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}]^T$  –  $n$ -мірний вектор початкових умов.

Багато задач в електроніці приводять до жорстких диференціальних рівнянь. Результат розв'язку таких рівнянь містить як швидко затухаючі, так і повільно затухаючі компоненти. Наявність малих сталих часу не дозволяє інтегрувати такі системи явними методами із великим кроком навіть на ділянках після перехідного часу, де швидко затухаючі процеси практично завершилися. Наявність швидко затухаючих компонент накладає жорсткі обмеження на вибір кроку явних методів на всьому відрізку інтегрування. Якщо ці обмеження не виконуються, то розв'язки явними методами втрачають стійкість. Для оцінки жорсткості диференціальних рівнянь використовують коефіцієнт жорсткості, який може бути розрахований за формулою:

$$S = \frac{\max_{i=1, n, t \in [0, t_{end}]} (-\operatorname{Re} \lambda_i(t))}{\min_{i=1, n, t \in [0, t_{end}]} |\operatorname{Re} \lambda_i(t)|},$$

де  $\lambda_i(t)$  — власні значення матриці Якобі функції  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ .

Загальним підходом до розв'язання жорстких диференціальних рівнянь є використання неявних методів. Саме використання неявних методів дозволяє вибирати крок інтегрування тільки виходячи із заданої точності розв'язку, а не із міркувань стійкості

На даний час при інтегруванні жорстких систем рівнянь широко використовується метод Гіра. В його основу покладені чисто неявні багатокрокові методи. Для методу Гіра порядку  $m$  розв'язок  $\mathbf{Y}_{i+1}$  в точці  $t=t_{i+1}$  визначається за неявною формулою:

$$\frac{1}{h_i} \sum_{k=0}^m a_k \mathbf{Y}_{i-k+1} = \mathbf{F}(t_{i+1}, \mathbf{Y}_{i+1}), \quad (3)$$

де  $h_i = t_{i+1} - t_i$  – крок інтегрування,  $a_k$  – коефіцієнти, які, в загальному випадку, змінюються від точки до точки.

Права частина рівняння (3) є скінчено-різницевою апроксимацією похідної  $\frac{d\mathbf{Y}}{dt}$ , отриманою за допомогою значень функцій, розрахованих на попередніх  $m$  кроках. Тому її часто називають формулою диференціювання назад.

Для розрахунку коефіцієнтів  $a_k$  в формулі (3), будують інтерполяційний поліном, що проходить через  $m+1$  точку  $(t_{i-m+1}, \mathbf{Y}_{i-m+1}), (t_{i-m+2}, \mathbf{Y}_{i-m+2}), \dots, (t_i, \mathbf{Y}_i), (t_{i+1}, \mathbf{Y}_{i+1})$  і обчислюють похідну  $\frac{d\mathbf{Y}}{dt}$  в точці  $t=t_{i+1}$  явним чином. Для прикладу розглянемо розрахунок коефіцієнтів  $a_k$  для формули Гіра другого порядку ( $m=2$ ). Для цього побудуємо інтерполяційний поліном, що проходить через 3 точки  $(t_{i-1}, \mathbf{Y}_{i-1}), (t_i, \mathbf{Y}_i)$  і  $(t_{i+1}, \mathbf{Y}_{i+1})$ :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{i+1} \frac{(t-t_i)(t-t_{i-1})}{h_i(h_i+h_{i-1})} - \mathbf{Y}_i \frac{(t-t_{i+1})(t-t_{i-1})}{h_i h_{i-1}} + \mathbf{Y}_{i-1} \frac{(t-t_{i+1})(t-t_i)}{(h_i+h_{i-1})h_i}. \quad (4)$$

Диференціюючи (4) в точці  $t=t_{i+1}$  маємо:

$$\frac{d\mathbf{Y}(t_{i+1})}{dt} = \mathbf{Y}_{i+1} \left( \frac{1}{h_i+h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) - \mathbf{Y}_i \frac{h_i+h_{i-1}}{h_i h_{i-1}} + \mathbf{Y}_{i-1} \frac{h_i}{(h_i+h_{i-1})h_i}. \quad (5)$$

Порівнюючи (5) із лівою частиною формули (3) отримаємо:

$$a_0 = 1 + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}}; \quad a_1 = -1 - \frac{h_i}{h_{i-1}}; \quad a_2 = \frac{h_i^2}{(h_i+h_{i-1})h_{i-1}}.$$

Аналогічно розраховуються коефіцієнти при  $m=3,4,5$ .

$m=3$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}} + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}+h_{i-2}}; \\ a_1 &= -\frac{(h_i+h_{i-1})(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})}{h_{i-1}(h_{i-1}+h_{i-2})}; \\ a_2 &= \frac{h_i^2(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})}{(h_i+h_{i-1})h_{i-1}h_{i-2}}; \\ a_3 &= -\frac{h_i^2(h_i+h_{i-1})}{(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})(h_{i-1}+h_{i-2})h_{i-2}}. \end{aligned}$$

$m=4$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}} + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}+h_{i-2}} + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}+h_{i-2}+h_{i-3}}; \\ a_1 &= -\frac{(h_i+h_{i-1})(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})(h_i+h_{i-1}+h_{i-2}+h_{i-3})}{h_{i-1}(h_{i-1}+h_{i-2})(h_{i-1}+h_{i-2}+h_{i-3})}; \\ a_2 &= \frac{h_i^2(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})(h_i+h_{i-1}+h_{i-2}+h_{i-3})}{(h_i+h_{i-1})h_{i-1}h_{i-2}(h_{i-2}+h_{i-3})}; \\ a_3 &= -\frac{h_i^2(h_i+h_{i-1})(h_i+h_{i-1}+h_{i-2}+h_{i-3})}{(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})(h_{i-1}+h_{i-2})h_{i-2}h_{i-3}}; \\ a_4 &= \frac{h_i^2(h_i+h_{i-1})(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})}{(h_i+h_{i-1}+h_{i-2}+h_{i-3})(h_{i-1}+h_{i-2}+h_{i-3})(h_{i-2}+h_{i-3})h_{i-3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m=5: \\
a_0 &= 1 + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1} + h_{i-2}} + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3}} + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4}}; \\
a_1 &= -\frac{(h_i + h_{i-1})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}{h_{i-1}(h_{i-1} + h_{i-2})(h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}; \\
a_2 &= \frac{h_i^2(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}{(h_i + h_{i-1})h_{i-1}h_{i-2}(h_{i-2} + h_{i-3})(h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}; \\
a_3 &= -\frac{h_i^2(h_i + h_{i-1})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}{(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_{i-1} + h_{i-2})h_{i-2}h_{i-3}(h_{i-3} + h_{i-4})}; \\
a_4 &= \frac{h_i^2(h_i + h_{i-1})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}{(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_{i-2} + h_{i-3})h_{i-3}h_{i-4}}; \\
a_5 &= -\frac{h_i^2(h_i + h_{i-1})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})}{(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})(h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})(h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})(h_{i-3} + h_{i-4})h_{i-4}}.
\end{aligned}$$

Слід відмітити, що методи Гіра порядку вище 6 на практиці не використовують через їх чисельну нестійкість.

Метод Гіра першого порядку співпадає з неявним методом Ейлера. Оскільки методи Гіра являються неявними, то, як випливає із (3), на кожному кроці необхідно розв'язати систему нелінійних рівнянь:

$$h_i \mathbf{F}(t_{i+1}, \mathbf{Y}_{i+1}) - a_0 \mathbf{Y}_{i+1} = \sum_{k=1}^m a_k \mathbf{Y}_{i-k+1}. \quad (6)$$

Для розв'язання системи (6), як правило використовують квазі-ньютонівські методи розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Локальна похибка методів Гіра може бути оцінена за формулою:

$$R_i = c_i h_i^{m+1}, \quad (7)$$

де  $c_i$  – коефіцієнт, який залежить від нелінійності функції  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$  на відрізку  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Таким чином, порядок точності методів Гіра дорівнює  $m$ :

$$p = m. \quad (8)$$

Найбільш універсальним методом апостеріорної оцінки похибки методів Гіра є правило Рунге:

$$R_i = \frac{\left\| \mathbf{Y}_{i+1, \frac{h}{q}} \right\| - \left\| \mathbf{Y}_{i+1, h} \right\|}{q^p - 1}, \quad (9)$$

де  $\mathbf{Y}_{i+1, h}$ ,  $\mathbf{Y}_{i+1, \frac{h}{q}}$  – значення функцій, які обчислюються в точці  $t=t_{i+1}$ , з кроком  $h_i$  и  $\frac{h_i}{q}$

відповідно,  $p$  – порядок точності метода.

Для автоматичного вибору кроку, після апостеріорної оцінки похибки, перевіряється виконання умови:

$$R_i \leq \varepsilon \|\mathbf{Y}_{i+1}\|. \quad (10)$$

Якщо вона не виконується, то крок зменшують в  $q$  раз або в  $\sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon \|\mathbf{Y}_{i+1}\|}{R_i}}$  раз. Зменшення кроку виконують до тих пір, поки не виконується умова (10). Після чого переходять до іншого кроку. При цьому новий крок  $h_{i+1}$  вибирають за правилом зон:

$$h_{i+1} = \begin{cases} h_i, & \frac{\varepsilon}{q^{p+1}} \leq \frac{R_i}{\|\mathbf{Y}_{i+1}\|} \leq \varepsilon; \\ qh_i, & \frac{R_i}{\|\mathbf{Y}_{i+1}\|} < \frac{\varepsilon}{q^{p+1}}, \end{cases} \quad (11)$$

або із співвідношення:

$$h_{i+1} = h_i \sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon \|\mathbf{Y}_{i+1}\|}{R_i}}. \quad (12)$$

Необхідно відмітити, що у відповідності до формули (7) локальна похибка методів Гіра залежить як від нелінійності функції  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$  так і від порядку методу. Тому, для заданої похибки розв'язку, на кожному відрізку, де шукається локальний розв'язок, завжди існує оптимальний порядок методу, який забезпечує знаходження розв'язку з найбільшим кроком. Для прикладу розглянемо методи Гіра першого і другого порядку. На рис.1 показана залежність локальної похибки від величини кроку для вказаних методів. Як видно з цього рисунка, при заданій похибці розв'язку  $R_0$  обидва методи мають однакову ефективність. Для заданої похибки  $R_2$ , більш оптимальним є метод другого порядку. Якщо ж задана похибка розв'язку  $R_1$ , то перевагу слід віддати методу першого порядку. Сучасні методи інтегрування диференціальних рівнянь будуються як методи змінного порядку, коли в залежності від заданої похибки і нелінійності  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$  вибирається метод із оптимальним порядком. Такі методи адаптивно підлаштовують порядок рівнянь на різних ділянках для того, щоб інтегрування йшло з максимальним кроком.

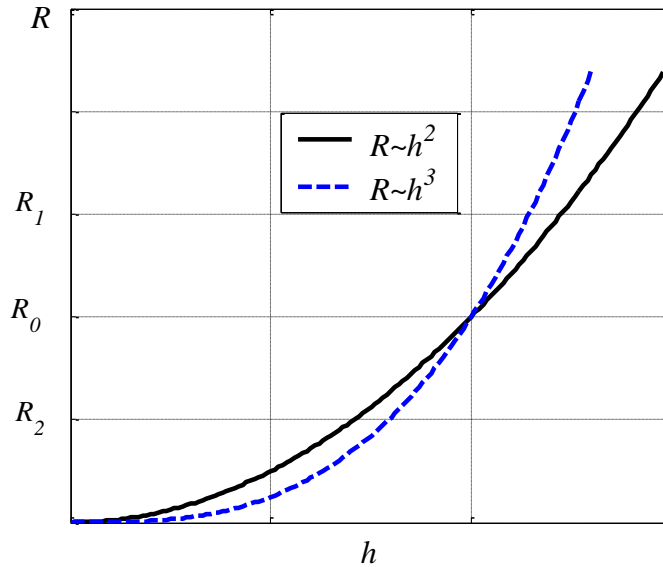


Рис.1. Локальна похибка розв'язку системи диференціальних рівнянь методами першого і другого порядків точності з кроком  $h$ .

### Робоче завдання

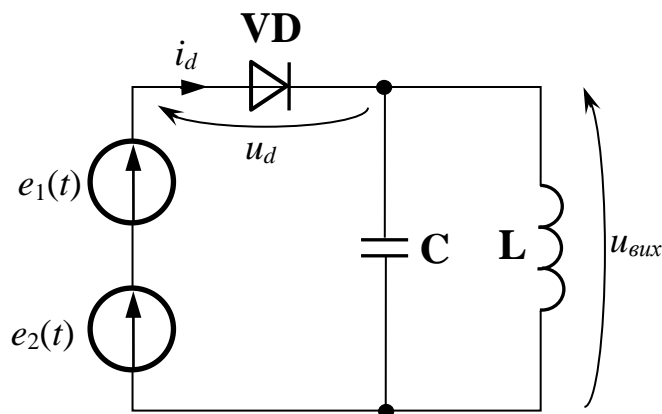
1. Побудувати алгоритми чисельного розв'язання задачі Коші методами Гіра 2, 3 і 4 порядку з автоматичним вибором кроку інтегрування для досягнення заданої локальної відносної похибки  $\varepsilon$  або ж абсолютної похибки  $\Delta$ .
2. Скласти робочу програму з використанням універсальних функцій чисельного розв'язання задачі Коші. Мінімальний набір параметрів функції розв'язання задачі Коші повинен включати: ім'я функції, яка обчислює вектор похідних шуканих функцій (правих частин системи диференціальних рівнянь), кількість диференціальних рівнянь в системі, інтервал часу, на якому потрібно знайти розв'язок, вектор початкових умов, похибку розв'язку, масив часових відліків, в яких знайдено розв'язок, матрицю розв'язків, максимальне число часових відліків, кількість фактично отриманих часових відліків, в яких знайдено розв'язки із заданою похибкою.
3. Набрати і налаштувати програму на комп'ютері. Налаштування здійснити з використанням в якості  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$  функцій, для яких відомий аналітичний розв'язок.
4. Вибрати задачу відповідно до варіанту. Для заданої схеми сформулювати задачу Коші.
5. Провести розв'язання задачі Коші, отриманої в пункті 4 робочого завдання кожним методом із підрахунком числа елементарних відрізків, необхідних для досягнення заданої похибки  $\varepsilon=10^{-3}$  і необхідного числа звернень до функції  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ .
6. Порівняти різні методи по ефективності.

## Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета.
3. Робоче завдання.
4. Математичні формулювання алгоритмів розв'язку задачі Коші.
5. Розв'язуване рівняння.
6. Текст робочої програми.
7. Результати розрахунків із підрахуванням числа необхідних розбиттів заданого відрізка на елементарні і кількості звертань до функції  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$  для кожного із методів, графіки розв'язків.
8. Висновки.

## Задачі

1. Знайти напругу  $u_{\text{вих}}$  протягом часу  $t \in [0, t_{\text{end}}]$  для схеми, наведеної на рисунку.



Врахувати, що струм  $i_d$ , що протікає через діод пов'язаний з напругою  $u_d$  залежністю:

$$i_d = i_0 \left( \exp\left(\frac{u_d}{m\phi_T}\right) - 1 \right),$$

де  $i_0$  — зворотний струм діода,  $\phi_T$  — тепловий потенціал,  $m$  — коефіцієнт неідеальності діода. Залежності  $e_1(t)$  і  $e_2(t)$  мають вигляд:

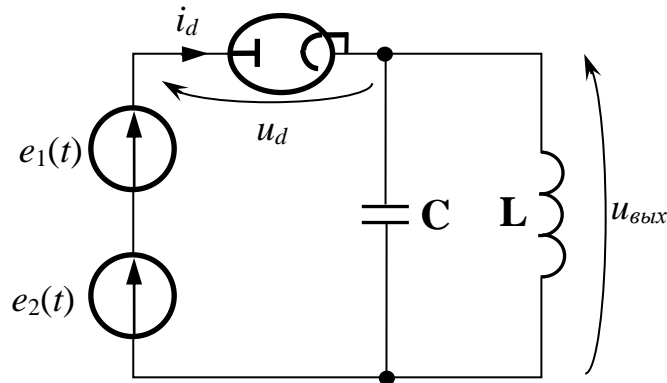
$$e_n(t) = E_{0n} \sin(\omega_n t + \varphi), \quad n = 1, 2,$$

де  $E_{0n}$  — амплітуда,  $\omega_n$  — кругова частота,  $\varphi_n$  — фаза напруги джерела.

Значення параметрів напруги джерел  $E_{0n}$ ,  $\omega_n$  і  $\varphi_n$ , індуктивність  $L$ , ємність конденсатора  $C$ , параметри діода і час  $t_{\text{end}}$  вибрати із таблиці у відповідності з варіантом:

№ варіанту	$E_{01}$ , В	$\omega_1$ , $10^6$ рад/с	$\varphi_1$	$E_{02}$ , В	$\omega_2$ , $10^6$ рад/с	$\varphi_2$	$L$ , $10^{-3}$ Гн	$C$ , $10^{-9}$ Ф	$i_0$ , $10^{-9}$ А	$m$	$\varphi_T$ , $10^{-3}$ В	$t_{end}$ , $10^{-3}$ с
1	0.4	1.25	0	0.4	1.5	$-\pi/4$	0.2	80	20	1.8	26	0.125
2	0.3	0.4	$-\pi/4$	0.3	0.45	0	$10^4$	$4 \cdot 10^4$	$10^5$	2.2	26	0.63

2. Знайти напругу  $u_{вих}$  протягом часу  $t \in [0, t_{end}]$  для схеми, наведеної на рисунку.



Врахувати, що струм  $i_d$ , що протікає через діод пов'язаний з напругою  $u_d$  залежністю:

$$i_d = \begin{cases} g u_d^{3/2}, & u_d \geq 0 \\ 0, & u_d < 0 \end{cases}$$

де  $g$  — первеанс діода. Залежності  $e_1(t)$  і  $e_2(t)$  мають вигляд:

$$e_n(t) = E_{0n} \sin(\omega_n t + \varphi), \quad n = 1, 2,$$

де  $E_{0n}$  — амплітуда,  $\omega_n$  — кругова частота,  $\varphi_n$  — фаза напруги джерела.

Значення параметрів напруги джерел  $E_{0n}$ ,  $\omega_n$  і  $\varphi_n$ , індуктивність  $L$ , ємність конденсатора  $C$ , параметри діода і час  $t_{end}$  вибрати із таблиці у відповідності з варіантом:

№ варіанту	$E_{01}$ , В	$\omega_1$ , $10^6$ рад/с	$\varphi_1$	$E_{02}$ , В	$\omega_2$ , $10^3$ рад/с	$\varphi_2$	$L$ , $10^{-6}$ Гн	$C$ , $10^{-9}$ Ф	$g$ , $10^{-3}$ А/В <sup>3/2</sup>	$t_{end}$ , $10^{-6}$ с
1	20	35	0	20	30	$\pi/8$	2	20	4	6.3
2	30	0.5	$-\pi/8$	30	0.625	$\pi/4$	200	320	0.1	252

3. Знайти напругу  $u_{вих}$  протягом часу  $t \in [0, t_{end}]$  для схеми, наведеної на рисунку.

Врахувати, що струми емітера  $i_e$  і колектора  $i_c$  пов'язані з напругами  $u_{be}$  і  $u_{bc}$  залежностями:

$$i_e = i_{e0} \left( \exp \left( \frac{u_{be}}{m_e \phi_T} \right) - 1 \right),$$

$$i_c = i_{c0} \left( \exp \left( \frac{u_{bc}}{m_c \phi_T} \right) - 1 \right),$$

де  $i_{e0}$  — зворотний струм емітерного переходу транзистора,  $\phi_T$  — тепловий потенціал,  $m_e$  — коефіцієнт неідеальності емітерного переходу транзистора,  $i_{c0}$  — зворотний струм колекторного переходу транзистора,  $m_c$  — коефіцієнт неідеальності колекторного переходу транзистора. Залежність  $e(t)$  має вигляд

$$e(t) = E_0 \sin(2\pi f t + \varphi),$$

де  $E_0$  — амплітуда,  $f$  — частота,  $\varphi$  — фаза напруга джерела.

Значення параметрів напруги джерела  $E_0$ ,  $f$  і  $\varphi$ , опору резистора  $R$ , ємність конденсатора  $C$ , параметри транзистора і час  $t_{end}$  вибрати із таблиці у відповідності з варіантом

№ варіанту	$E_0$ , В	$f$ , $10^3$ Гц	$\varphi$	$R$ , $10^3$ Ом	$C$ , $10^{-6}$ Ф	$I_{e0}$ , $10^{-12}$ А	$m_e$	$I_{c0}$ , $10^{-12}$ А	$m_c$	$\phi_T$ , $10^{-3}$ В	$t_{end}$ , $10^{-3}$ с
1	5	1	$\pi/8$	4	1	1	1.7	6	1.8	26	3
2	10	5	$-\pi/6$	1	0.8	5	1.6	25	1.8	26	0.6
3	15	4	$-\pi/8$	1.5	0.5	10	1.7	70	1.9	26	0.75
4	3	2	$\pi/4$	0.2	5	20	1.9	80	1.8	26	1.5



*Варіанти завдань*

Номер бригади	Номер задачі	Номер варіанту задачі
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1
5	1	2
6	2	2
7	3	2
8	4	2
9	1	3
10	2	3
11	3	3
12	4	3
13	1	4
14	2	4
15	3	4
16	4	4