

**Ю. В. Прокопенко,
В. А. Казміренко,
І. П. Голубєва**

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ТА БІОФІЗИКИ

*Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»
як навчальний посібник для підготовки бакалаврів за
спеціальністю 176 Мікро- та наносистемна техніка*

Київ
«Політехніка»
2023

УДК 517.95 + 519.6

Рецензенти: *С. С. Забара*, докт. техн. наук, проф.
В. Г. Вербицький, докт. техн. наук, снс

Відповідальний редактор *В. І. Тимофєєв*, докт. техн. наук, проф.

Прокопенко Ю. В., Казміренко В. А., Голубєва І. П.

Методи математичної фізики та біофізики: Навч. посіб. – К.: Видавництво, 2023. – 153 с.

Викладено навчальний матеріал про чисельне інтегрування та розв'язання диференціальних рівнянь.

Для студентів бакалаврату за спеціальністю 176 Мікро- та наносистемна техніка.

УДК 517.95 + 519.6

© Ю. В. Прокопенко,
В. А. Казміренко,
І. П. Голубєва, 2023

Зміст

Вступ.....	6
1. Чисельне інтегрування функцій.....	7
1.1. Загальна похибка чисельного інтегрування.....	9
1.2. Формули Ньютона-Котеса.....	10
1.3. Формули Чебишова.....	16
1.4. Формули Гауса.....	20
1.5. Апостеріорна оцінка похибки інтегрування.....	22
2. Чисельне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь.....	28
2.1. Метод Ейлера.....	32
2.2. Методи Рунге – Кутта.....	36
2.3. Багатоточкові методи.....	42
2.4. Апостеріорна оцінка похибки розв'язання задачі Коші. Автоматичний вибір кроку інтегрування.....	48
2.5. Жорсткі рівняння.....	53
2.5.1. Поняття про жорсткі диференціальні рівняння.....	53
2.5.2. Методи розв'язання жорстких диференціальних рівнянь.....	57
2.6. Крайові задачі.....	60
2.6.1. Зведення крайових задач до задач Коші.....	61
2.6.2. Метод скінченних різниць.....	64
2.6.3. Проекційні методи розв'язання крайових задач.....	67
2.6.4. Метод скінченних елементів розв'язання крайових задач.....	72
3. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку.....	84
3.1. Основні визначення та приклади диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Рівняння Власова. Кінетичне рівняння Больцмана. Рівняння неперервності.....	84

3.2. Лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку.....	88
3.3. Квазілінійне диференціальне рівняння першого порядку з частинними похідними	95
3.4. Нелінійне диференціальне рівняння першого порядку з частинними похідними	100
4. Диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.....	105
4.1. Класифікація квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Гіперболічні, параболічні та еліптичні рівняння. Приведення рівнянь до канонічної форми.	105
4.2. Приклади фізичних задач, які описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними другого порядку.	119
4.2.1. Хвильове рівняння та його розв'язки. Формула Даламбера для задачі Коші. Розв'язання крайової задачі.	119
4.2.2. Рівняння дифузії та граничні умови для нього.	126
4.2.3. Рівняння теплопровідності та граничні умови для нього.	127
4.2.4. Рівняння електростатики. Рівняння Пуассона та Лапласа та граничні умови для них.	131
4.2.5. Рівняння електродинаміки. Векторні та скалярні потенціали електромагнітного поля. Вектори Герца. Зведення рівнянь електродинаміки до гіперболічних та еліптичних рівнянь.	133
4.3. Формула Гріна та метод функції Гріна для рівняння Лапласа і Пуассона. Потенціальне поле. Поле точкового джерела.	139
4.4. Метод Фур'є (ділення змінних) розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.	139
4.4.1. Рівняння Гельмгольца в прямокутній системі координат.	139
4.4.2. Рівняння Гельмгольца в циліндричній системі координат. Функції Бесселя.	142

4.4.3. Рівняння Гельмгольца в сферичній системі координат. Приєднані функції Лежандра. Сферичні функції Бесселя.....	145
5. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.....	150
5.1. Метод скінчених різниць.....	150
5.2. Проекційні методи.....	150
5.3. Метод скінчених елементів.....	150
6. Інтегральні рівняння. Основні поняття та приклади використання.....	151
Список використаної літератури	152

Вступ

Дисципліна «Методи математичної фізики та біофізики» – складова частина обов'язкових дисциплін професійної та практичної підготовки бакалаврів за спеціальністю: 176 Мікро- та наносистемна техніка. Він ґрунтується на знаннях, отриманих у результаті вивчення математики, персональних комп'ютерів, алгоритмічних мов і основ програмування, які забезпечують розуміння основ побудови методів аналітичного та чисельного розв'язання задач математичної фізики і біофізики та особливостей реалізації їх на комп'ютері. Підґрунтям для подальшого вивчення курсу є засвоєння методів моделювання та проектування в електроніці.

Мета курсу – оволодіння аналітичними та чисельними методами розв'язання задач аналізу і проектування в мікро- та наноелектроніці, біомедичній електроніці, отримання навичок аналітичного розв'язання рівнянь і реалізації чисельних алгоритмів на комп'ютері та інших обчислювальних системах.

Автори не ставили за мету формулювання та доведення відомих теорем чисельних методів, математичної фізики, які стали класичними і добре висвітлені в цитованій літературі. Основну увагу приділено роз'ясненню суті методів, що розглядаються, та особливостям їх застосування.

1. Чисельне інтегрування функцій

Під час моделювання різноманітних фізичних і біофізичних процесів та електричних кіл досить часто виникає необхідність обчислення інтегралів [7]. Така задача, наприклад, ставиться для пошуку середніх значень фізичних і біофізичних величин, обчислення енергетичних характеристик, ймовірності подій за відомими функціями розподілу ймовірностей, тощо. Однак, далеко не завжди вдається обчислити інтеграли аналітично, тому використовують чисельні методи.

Задача чисельного інтегрування полягає в знаходженні наближеного значення інтеграла

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

де $f(x)$ – задана функція. Для розв'язання цієї задачі відрізок $[a, b]$ зазвичай розбивають на n елементарних відрізків точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ і шукане значення інтеграла замінюють сумою

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx. \quad (1.1)$$

На кожному елементарному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ вводиться сітка $x_i = \xi_{i,0} < \xi_{i,1} < \dots < \xi_{i,m} = x_{i+1}$. Як наближене значення інтеграла розглядають число

$$I_i = h_i \sum_{j=0}^m c_j f(\xi_{i,j}), \quad (1.2)$$

де $f(\xi_{i,j})$ – значення функції $f(x)$ у вузлах $x = \xi_{i,j}$, c_j – вагові множники, що залежать тільки від вузлів, а не від вибору $f(x)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Для чисельного наближення визначених інтегралів часто використовують термін «квадратура», щоб уникнути плутанини з інтегруванням диференціальних рівнянь. Тому

формулу (1.2) називають квадратурною формулою. Число m називають порядком квадратурної формули. Точки $\xi_{i,j}$ називають вузлами, а числа c_j – коефіцієнтами квадратурної формули.

Задача чисельного інтегрування за допомогою квадратур полягає у відшуканні таких вузлів $\xi_{i,j}$ і таких вагових множників c_j , щоб похибка квадратурної формули

$$R_i = I_i(f) - I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - h_i \sum_{j=0}^m c_j f(\xi_{i,j})$$

була мінімальною для функції із заданого класу (значення R_i залежить від гладкості $f(x)$). Якщо $R_i = O(h_i^{p+1})$, то кажуть, що квадратурна формула має порядок точності p .

Оскільки квадратурна формула (1.2) повинна бути справедливою для будь-якої функції $f(x)$, у тому числі й для $f(x) \equiv 1$, одержуємо

$$\sum_{j=0}^m c_j = 1. \quad (1.3)$$

Для побудови формули чисельного інтегрування на всьому відрізку $[a, b]$ досить побудувати квадратурну формулу для інтеграла $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ на елементарному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ і скористатися формулою (1.1), яку називають складеною квадратурною формулою. Похибка складеної квадратурної формули дорівнює сумі похибок квадратурної формули на елементарних відрізках

$$R_n = I(f) - \sum_{i=0}^{n-1} I_i = \sum_{i=0}^{n-1} R_i.$$

Різні групи методів відрізняються за способом вибору вузлів та вагових коефіцієнтів.

1.1. Загальна похибка чисельного інтегрування

Нехай значення інтеграла визначається за складеною квадратурною формулою (1.1), яка характеризується похибкою R_n . Тоді загальна похибка обчислення інтеграла дорівнює сумі похибки квадратурної формули R_n і обчислювальної похибки квадратури ΔI_n [1]:

$$\Delta I_\Sigma = \Delta I_n + R_n.$$

Обчислювальна похибка квадратурної формули пов'язана з похибкою запису вагових коефіцієнтів Δc_i і похибкою обчислення функції $f(x)$ у вузлах. Тому обчислювальна похибка квадратури (1.1) дорівнює

$$\Delta I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\max |f(x_i)| \Delta c_i + c_i \max \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right| \Delta x_i \right), \quad (1.4)$$

де Δc_i – абсолютна похибка вагових коефіцієнтів; Δx_i – абсолютна похибка вузлів.

Нехай відносна похибка округлення дійсних чисел дорівнює $\varepsilon_{\text{маш}}$. Тоді, якщо похибка запису вагових коефіцієнтів і вузлів пов'язана тільки з похибкою округлення, то $\Delta c_i = \varepsilon_{\text{маш}} c_i$, $\Delta x_i = \varepsilon_{\text{маш}} x_i$. Отже, для похибки (1.4) можна записати

$$\Delta I_n \leq n \varepsilon_{\text{маш}} (A_1 + A_2) = n A \varepsilon_{\text{маш}},$$

де $A_1 \geq c_i \max |f(x_i)|$, $\forall i = \overline{0, n}$, $A_2 \geq c_i x_i \max \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right|$, $\forall i = \overline{0, n}$, $A = A_1 + A_2$.

Таким чином, обчислювальна похибка квадратурної формули лінійно зростає зі збільшенням кількості вузлів.

Похибка квадратурної формули R_n оцінюється як

$$R_n \leq B_1 h^p,$$

де p – стала, що визначається порядком квадратурної формули; h – крок сітки. З

огляду на те, що $h = \frac{b-a}{n}$, маємо

$$R_n \leq \frac{B_1(b-a)^p}{n^p} = \frac{B}{n^p}.$$

Таким чином, похибка дискретизації квадратурної формули зменшується зі зростанням n .

Отже, існує абсолютна похибка $\Delta I_{\Sigma \min}$ для будь-якої квадратурної формули, яку не можна зменшити, збільшуючи число кроків n (рис. 1.1).

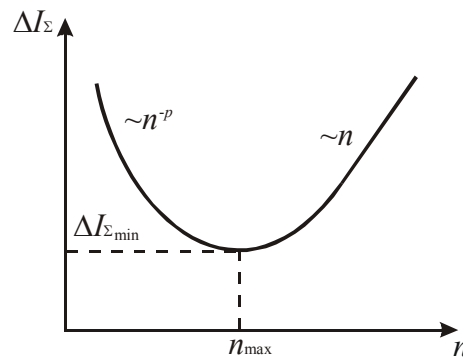


Рис. 1.1. Загальна похибка чисельного інтегрування

Конкретне значення $\Delta I_{\Sigma \min}$ залежить від значень $A_1, A_2, B_1, a, b, \varepsilon_{\text{маш}}$. Якщо останні можна оцінити, то значення n_{max} і $\Delta I_{\Sigma \min}$ можна знайти з умови

$$\frac{dI_{\Sigma}}{dn} = \frac{d}{dn} \left(A\varepsilon_{\text{маш}}n + \frac{B}{n^p} \right) = 0.$$

Звідси $n_{\text{max}} = \sqrt[p+1]{\frac{pB}{A\varepsilon_{\text{маш}}}}$.

1.2. Формули Ньютона-Котеса

Формули Ньютона-Котеса одержують інтегруванням інтерполяційних поліномів, побудованих за рівномірною сіткою [4, 27]. Розрізняють формули

відкритого і закритого типів. У формулах закритого типу у розрахунках використовують значення функції, обчислені в обох кінцях елементарного відрізка, а у формулах відкритого типу, принаймні, одне зі значень участі у розрахунках не бере.

Розглянемо побудову формули Ньютона-Котеса m -го порядку закритого типу. Для цього розіб'ємо елементарний відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ на m рівних частин і обчислимо значення функції у вузлах $f(\xi_{i,j})$, де $\xi_{i,j} = x_i + j \frac{h_i}{m}$, $j = \overline{0, m}$. Побудуємо інтерполяційний поліном Лагранжа на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ з вузлами $(\xi_{i,j}, f(\xi_{i,j}))$, $j = \overline{0, m}$:

$$f(x) \approx P_m(x) = \sum_{j=0}^m \prod_{k=0, k \neq j}^m \frac{x - \xi_{i,k}}{\xi_{i,j} - \xi_{i,k}} f_{i,j} = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m-j}}{j!(m-j)!} \prod_{k=0, k \neq j}^m (t-k) f_{i,j}, \quad (1.5)$$

де $f_{i,j} = f(\xi_{i,j}) = f\left(x_i + j \frac{h_i}{m}\right)$, $t = \frac{x - x_i}{\frac{h_i}{m}}$.

Тоді, інтегруючи (1.5) і виконуючи заміну змінних $x = x_i + t \frac{h_i}{m}$, $dx = \frac{h_i}{m} dt$,

одержимо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = h_i \sum_{j=0}^m c_j f_{i,j}, \quad (1.6)$$

де c_j – коефіцієнти Котеса, які дорівнюють

$$c_j = \frac{(-1)^{m-j}}{j!(m-j)!} \frac{1}{m} \int_0^m \prod_{k=0, k \neq j}^m (t-k) dt. \quad (1.7)$$

Формулу (1.6) називають квадратурною формулою Ньютона-Котеса. З виразу (1.7) випливає, що коефіцієнти Котеса c_j не залежать від функції $f(x)$. Тоді, вважаючи, що $f(x) \equiv 1$, з (1.6) маємо

$$\sum_{j=0}^m c_j = 1.$$

Крім цього, з (1.7) випливає, що

$$c_j = c_{m-j}.$$

Отже, коефіцієнти Котеса симетричні відносно центра елементарного відрізка.

Оцінимо похибку квадратурної формули Ньютона-Котеса (1.6). Враховуючи, що похибка інтерполяції функції $f(x)$ поліномом $P_m(x)$ на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ дорівнює:

$$f(x) - P_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\theta_i)}{(m+1)!} Q_{m+1}(x),$$

де $\theta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $Q_{m+1}(x) = \prod_{k=0}^m (x - \xi_{i,k})$, маємо:

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f^{(m+1)}(\theta_i)}{(m+1)!} Q_{m+1}(x) dx = \frac{f^{(m+1)}(\theta_i)}{(m+1)!} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \prod_{k=0}^m (x - \xi_{i,k}) dx.$$

Проводячи під час інтегрування заміну змінних $x = \frac{h_i}{m}t + x_i$, $dx = \frac{h_i}{m}dt$,

отримаємо:

$$R_i = \frac{f^{(m+1)}(\theta_i)}{(m+1)!} \left(\frac{h_i}{m}\right)^{m+2} \int_0^m \prod_{k=0}^m (t - k) dt. \quad (1.8)$$

З формули (1.8) випливає, що якщо функція $f(x)$ є поліномом степені m , то $f^{(m+1)}(\theta_i) \equiv 0$ і $R_i = 0$. Отже, квадратурна формула Ньютона-Котеса порядку m є абсолютно точною, щонайменше, для полінома степеня m . Покажемо, що якщо m парне, то квадратурна формула Ньютона-Котеса є абсолютно точною для поліномів степеня $(m+1)$. Для цього виконаємо в інтегралі формули (1.8) заміну змінних: $s = \frac{m}{2} - t$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^m \prod_{k=0}^m (t-k) dt &= \int_{-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \prod_{k=0}^m \left(\frac{m}{2} - k - s \right) ds = \\ &= - \int_{-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} s \prod_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} \left(-s - \left(\frac{m}{2} - k \right) \right) \left(-s + \left(\frac{m}{2} - k \right) \right) ds = \\ &= - \int_{-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} s \prod_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} \left(s^2 - \left(\frac{m}{2} - k \right)^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Останній інтеграл дорівнює нулю як інтеграл від непарної функції на симетричному відрізку. Отже, для парного m $R_i = 0$ навіть якщо $f^{(m+1)}(\theta_i) \neq 0$, тобто функція $f(x)$ є поліномом степеня більше, ніж m . Оцінка похибки квадратурної формули Ньютона-Котеса для парних m може бути отримана як

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f^{(m+2)}(\theta_i)}{(m+2)!} Q_{m+2}(x) dx = a_i f^{(m+2)}(\theta_i) h_i^{m+3},$$

де a_i – стала.

Таким чином, похибку формули Ньютона-Котеса оцінюють як

$$R_i = \begin{cases} a_i f^{(m+2)}(\xi_i) h_i^{m+3}, & m = 2l \\ a_i f^{(m+1)}(\xi_i) h_i^{m+2}, & m = 2l - 1 \end{cases}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

Коефіцієнти і залишкові члени формул Ньютона-Котеса перших 10-ти порядків наведено у табл. 1.1. Коефіцієнти Котеса розраховують за формулою

$$c_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^m \alpha_j}.$$

Зазначимо, що формули Ньютона-Котеса парного порядку за рахунок симетрії розбиття елементарного відрізка мають додатковий порядок точності. З цієї причини найчастіше використовують формули парного порядку.

Таблиця 1.1. Сталі для розрахунку коефіцієнтів Котеса і похибка формули Ньютона-Котеса порядку m [4, 25, 27]

m	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\sum_{j=0}^m \alpha_j$	R_i
1	1	1					2	$-\frac{1}{12}h_i^3 f''(\xi)$
2	1	4	1				6	$-\frac{1}{90 \cdot 2^5}h_i^5 f^{IV}(\xi)$
3	1	3	3	1			8	$-\frac{3}{80 \cdot 3^5}h_i^5 f^{IV}(\xi)$
4	7	32	12	32	7		90	$-\frac{8}{945 \cdot 4^7}h_i^7 f^{VI}(\xi)$
5	19	75	50	50	75	19	288	$-\frac{275}{12096 \cdot 5^7}h_i^7 f^{VI}(\xi)$
6	41	216	27	272	27	216	840	$-\frac{9}{1400 \cdot 6^9}h_i^9 f^{VIII}(\xi)$
7	751	3 577	1 323	2 989	2 989	1 323	17 280	$-\frac{8183}{518400 \cdot 7^9}h_i^9 f^{VI}(\xi)$
8	989	5 888	- 928	10 496	- 4 540	10 496	28 350	$\sim h_i^{11} f^X(\xi)$
9	2 857	15 741	1 080	19 344	5 778	5 778	89 600	$\sim h_i^{11} f^X(\xi)$
10	16 067	106 300	- 48 525	272 400	- 260 550	427 368	598 752	$\sim h_i^{13} f^{XII}(\xi)$

Із формули (1.9) випливає, що для зменшення похибки квадратурної формули Ньютона-Котеса необхідно збільшувати її порядок. Однак формули з $m \geq 10$ рідко використовують через їх чисельну нестійкість, що призводить до різкого зростання обчислювальної похибки. Причиною такої нестійкості є те, що коефіцієнти c_j у формулі (1.6) для великих m мають різні знаки. Деякі коефіцієнти стають від'ємними для $m = 8$. Для $m = 9$ вони всі додатні, але для $m \geq 10$ існують як додатні, так і від'ємні значення.

Приклад. Обчислимо інтеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Точне значення інтеграла

$I = \frac{\pi}{4} \approx 0,785398$. За формулою Ньютона-Котеса 4-го порядку згідно з (1.6) для одного елементарного відрізка маємо

$$I \approx \frac{1}{90}(7f(0) + 32f(0,25) + 12f(0,5) + 32f(0,75) + 7f(1)) = 0,785529.$$

Слід зазначити, що формули Ньютона-Котеса деяких порядків отримали окремі назви. Так формулу відкритого типу нульового порядку:

$$I_i = h_i f(\xi_i),$$

де $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, називають формулою прямокутників. Таку назву формула отримала із її геометричної інтерпретації, оскільки площа криволінійної трапеції замінюється площею прямокутника, рис. 1.2.

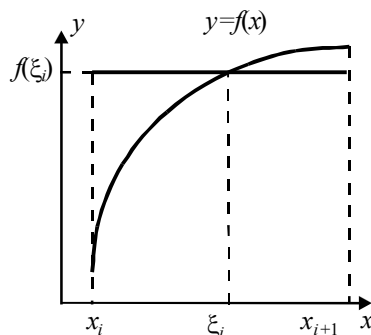


Рис. 1.2. Геометрична інтерпретація формули прямокутників.

Залишковий член формули прямокутників визначається наступним чином:

$$R_i = \frac{1}{24} h_i^3 f''(\xi_i) + \frac{1}{1920} h_i^5 f^{(4)}(\xi_i) + \dots$$

Отже ця формула має другий порядок точності.

Формулу Ньютона-Котеса першого порядку, враховуючи геометричну інтерпретацію (рис. 1.3), часто називають формулою трапецій.

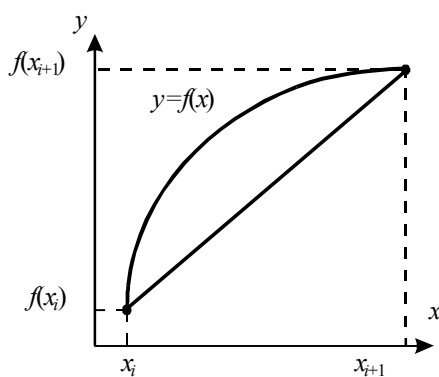


Рис. 1.3. Геометрична інтерпретація формули трапецій.

Формула Ньютона-Котеса другого порядку також називають формулою Сімпсона, або формулою парабол.

1.3. Формули Чебишова

Як вже було показано, у формулах Ньютона-Котеса вузли інтерполяції розміщуються рівномірно, а вагові коефіцієнти обчислюють так, щоб формула була точною для полінома степеня, не нижчого m [28]. У формулах Чебишова всі вагові коефіцієнти задають однаковими, а вузли обирають так, щоб формула була точною для полінома степеня, не нижчого від $m + 1$. Враховуючи, що формула має бути точною для $f(x) \equiv 1$, із (1.3) маємо:

$$c_j = c = \frac{1}{m+1},$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h_i}{m+1} \sum_{j=0}^m f(\xi_{ij}). \quad (1.10)$$

Для визначення вузлів $\xi_{i,j}$ проведемо в (1.10) заміну змінних

$$x = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} + \frac{h_i}{2} t,$$

тоді

$$\xi_{i,j} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} + \frac{h_i}{2} t_j. \quad (1.11)$$

Із формули (1.10) одержуємо

$$\int_{-1}^1 f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} + \frac{h_i}{2} t\right) dt = \frac{2}{m+1} \sum_{j=0}^m f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} + \frac{h_i}{2} t_j\right). \quad (1.12)$$

Введемо позначення $f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} + \frac{h_i}{2} t\right) = g(t)$. Тоді з формули (1.12)

отримаємо:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = \frac{2}{m+1} \sum_{j=0}^m g(t_j). \quad (1.13)$$

Для визначення вузлів t_j використовуємо умову, що формула (1.13) є точною для поліномів $g(t) = t, t^2, \dots, t^{m+1}$. Підставляючи ці функції в (1.13), одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
t_0 + t_1 + \dots + t_m &= 0; \\
t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_m^2 &= \frac{m+1}{3}; \\
t_0^3 + t_1^3 + \dots + t_m^3 &= 0; \\
t_0^4 + t_1^4 + \dots + t_m^4 &= \frac{m+1}{5}; \\
&\dots \\
t_0^{m+1} + t_1^{m+1} + \dots + t_m^{m+1} &= \frac{(m+1)(1-(-1)^{m+1})}{2(m+2)}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Із системи рівнянь (1.14) можна знайти t_j , $j = \overline{0, m}$, а потім з формули (1.11) — $\xi_{i,j}$.

Відомо, що система рівнянь (1.14) для $m=8$ і $m \geq 10$ не має дійсних розв'язків. А отже, методів Чебишова порядків $m=8$ і $m \geq 10$ не існує.

Оскільки квадратурна формула Чебишева є точною для полінома степеня $m+1$, то її похибка на елементарному відрізку не є більшою, ніж

$$R_i = a_i h_i^{m+3} f^{(m+2)}(\theta_i),$$

де a_i — стала, $\theta_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Отже формула Чебишова має порядок точності, щонайменше, $m+2$, і є більш точною, ніж формула Ньютона-Котеса, принаймні, для непарних порядків. Геометрична інтерпретація причини такого явища ілюструється на рис. 1.4, де порівнюються формула Ньютона-Котеса 1 порядку (формула трапецій) та формула Чебишова такого ж порядку.

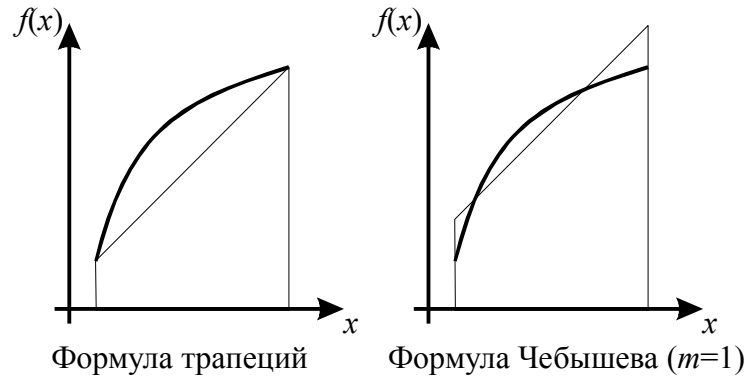


Рис. 1.4. Геометрична інтерпретація формул трапецій і Чебишова першого порядку.

Слід зазначити, що хоча формула Чебишова є більш точною, ніж формула Ньютона-Котеса непарних порядків, але вимагає більшої кількості обчислень функцій, оскільки у складеній формулі Ньютона-Котеса не перераховуються значення функції у крайніх вузлах.

Для $m = 0$ система рівнянь (1.14) має розв'язок $t_0 = 0$, і формула Чебишова є аналогічною формулі прямокутників (формулі Ньютона-Котеса 0 порядку).

Нижче наведено t_j для порядків $m = \overline{1,4}$:

$$m = 1; \quad -t_0 = t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$m = 2; \quad -t_0 = t_2 = 0,707107; \quad t_1 = 0;$$

$$m = 3; \quad -t_0 = t_3 = 0,794654; \quad -t_1 = t_2 = 0,187592;$$

$$m = 4; \quad -t_0 = t_4 = 0,832498; \quad -t_1 = t_3 = 0,374541; \quad t_2 = 0.$$

Для прикладу обчислимо інтеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ з попереднього прикладу

методом Чебишова третього порядку за одним елементарним відрізком.

Згідно з (1.11) знайдемо розташування вузлів формули Чебишова:

$$\xi_{0,0} = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot (-0.794654) = 0.102673;$$

$$\xi_{0,1} = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot (-0.187592) = 0.406204;$$

$$\xi_{0,2} = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot 0.187592 = 0.593796;$$

$$\xi_{0,3} = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot 0.794654 = 0.897327.$$

За формулою (1.10) обчислимо наближене значення інтегралу:

$$I \approx \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+0,102673^2} + \frac{1}{1+0,406204^2} + \frac{1}{1+0,593796^2} + \frac{1}{1+0,897327^2} \right) \approx 0,785303.$$

1.4. Формули Гауса

На відміну від формул Ньютона-Котеса та Чебишова, у виведеній з виразу (1.2) формулі Гауса вузли і вагові коефіцієнти не задаються, а визначаються так, щоб формула була точною для полінома найвищого можливого степеня [28]. Можна показати, що ця вимога виконується, якщо вузли обчислюються за формулою (1.11), причому t_j є коренями полінома Лежандра $P_{m+1}(t)$ степеня $m + 1$, а вагові коефіцієнти обчислюються за формулою [29]:

$$c_j = \frac{[P_{m+1}(1)]^2}{(1-t_j^2)[P'_{m+1}(t_j)]^2}.$$

Поліноми Лежандра знаходять за виразом

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m,$$

або за рекурентною формулою

$$P_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{m+1} x P_m(x) - \frac{m}{m+1} P_{m-1}(x) = x P_m(x) + \frac{x^2}{m+1} \frac{dP_m(x)}{dx};$$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x; \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).
\end{aligned}$$

Деякі значення параметрів формули Гауса для методів 1 – 4-го порядків наведено нижче:

$$\begin{aligned}
m = 1: & \quad -t_0 = t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; & \quad c_0 = c_1 = \frac{1}{2}; \\
m = 2: & \quad -t_0 = t_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}; t_1 = 0; & \quad c_0 = c_2 = \frac{5}{18}; c_1 = \frac{4}{9}; \\
m = 3: & \quad -t_0 = t_3 \cong 0,861136; & \quad c_0 = c_3 \cong 0,173928; \\
& \quad -t_1 = t_2 \cong 0,339981; & \quad c_1 = c_2 \cong 0,326072; \\
m = 4: & \quad -t_0 = t_4 \cong 0,9061798; & \quad c_0 = c_4 \cong 0,1184634; \\
& \quad -t_1 = t_3 = 0,5384693; & \quad c_1 = c_3 \cong 0,2393143; \\
& \quad t_2 = 0; & \quad c_2 \cong 0,2844444.
\end{aligned}$$

Методи Гауса мають порядок точності $2m + 1$ [27].

Приклад. Обчислимо інтеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ методом Гауса 3-го порядку за одним елементарним відрізком, $x_0 = 0, x_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
m = 3; & \quad -t_0 = t_3 \cong 0,861136; & \quad c_0 = c_3 \cong 0,173928; \\
& \quad -t_1 = t_2 \cong 0,339981; & \quad c_1 = c_2 \cong 0,326072.
\end{aligned}$$

Згідно з (1.11) знайдемо розташування вузлів формули Гауса:

$$\xi_{0,0} = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot (-0.861136) = 0.069432;$$

$$\xi_{0,1} = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot (-0.339981) = 0.330010;$$

$$\xi_{0,2} = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot 0.339981 = 0.669991;$$

$$\xi_{0,3} = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot 0.861136 = 0.930568.$$

Тоді згідно з формулою (1.2) маємо

$$I \approx 1 \cdot \left(\begin{array}{l} 0,173928 \cdot \frac{1}{1+0,069432^2} + 0,326072 \cdot \frac{1}{1+0,330010^2} + \\ + 0,326072 \cdot \frac{1}{1+0,669991^2} + 0,173928 \cdot \frac{1}{1+0,930568^2} \end{array} \right) =$$

$$= 0,785403$$

1.5. Апостеріорна оцінка похибки інтегрування

Відомо, що похибка інтегрування залежить від довжини елементарного відрізка, на якому застосовують квадратурну формулу. Виходячи із цього, для зменшення похибки довжину елементарного відрізка слід зменшувати, але таке зменшення значно збільшує обсяг розрахунків і, відповідно, обчислювальну похибку. Тому важливо вміти оцінити похибку інтегрування в процесі розрахунку.

Зробити це можна за допомогою першого правила Рунге [22], згідно з яким

$$R = \frac{I_{h/q} - I_h}{q^p - 1}, \quad (1.15)$$

де p – порядок точності методу; q – ціле число, як правило 2.

Таким чином, для оцінки похибки треба розрахувати інтеграл два рази. Спочатку розраховують інтеграл, розбивши відрізок інтегрування на елементарні

відрізки довжиною h , потім на елементарні відрізки довжиною h/q . Після цього за виразом (1.15) оцінюють похибку.

Використовуючи правило Рунге, можна не лише оцінити похибку, але й уточнити значення інтеграла

$$I \approx I_{h/q} + R = I_{h/q} + \frac{I_{h/q} - I_h}{q^p - 1}.$$

Такий спосіб називається екстраполяцією Річардсона. Він дозволяє підвищити точність квадратурної формули не менше, ніж на порядок. Якщо з якоїсь причини порядок точності квадратурної формули невідомий, то його можна оцінити за допомогою другого правила Рунге:

$$p = \frac{\ln\left(\frac{I_h - I_{h/q}}{I_{h/q} - I_{h/q^2}}\right)}{\ln(q)}.$$

Основним параметром, за допомогою якого впливають на величину похибки інтегрування, є довжина елементарного відрізка h_i . Для забезпечення високої точності крок інтегрування слід зменшувати. Однак для ефективного розв'язання задачі крок інтегрування слід вибирати найбільшим із можливих. Таким чином, величина кроку інтегрування визначається із суперечливих вимог похибки та ефективності. При цьому величина оптимального кроку інтегрування залежить від характеру підінтегральної функції і може суттєво змінюватися на відрізок $[a, b]$.

Можливість апостеріорної оцінки похибки інтегрування за правилами Рунге дозволяє обчислювати шуканий інтеграл із заданою похибкою шляхом автоматичного вибору кроку інтегрування h_i . Методи, в яких крок інтегрування визначається автоматично з умови заданої точності, називаються адаптивними.

Нехай використовується складена квадратурна формула

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} I_{h,i},$$

де $I_{h,i}$ — квадратурна сума на елементарному відрізку, причому на кожному елементарному відрізку використовується одна і та ж квадратурна формула. Нехай відомий порядок квадратурної формули p , і на кожному елементарному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ усі обчислення виконано двічі з кроками h_i і h_i/q , а похибка оцінена за правилом Рунге. Якщо на кожному елементарному відрізку для заданого $\Delta > 0$ виконується нерівність

$$|R_i| = \frac{|I_{h/q,i} - I_{h,i}|}{q^p - 1} \leq \frac{\Delta h_i}{b - a}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (1.16)$$

то похибка складеної квадратурної формули на всьому відрізку:

$$|R_n| \leq \frac{\Delta}{b - a} \sum_{i=0}^{n-1} h_i = \Delta.$$

Виконання умови (1.16) на кожному елементарному відрізку гарантує отримання розв'язку із заданою абсолютною похибкою Δ . Якщо задається відносна похибка ε , то Δ можна оцінити як $\Delta = \varepsilon |I_n|$.

Якщо на деякому з елементарних відрізків умова (1.16) не виконується, то на цьому відрізку крок інтегрування слід зменшити ще в q раз і повторити розрахунки. Зменшення кроку слід продовжувати до тих пір, поки не буде досягнуто виконання умови (1.16).

Навпаки, якщо оцінка (1.16) виконується, то слід перевірити, чи не можна рухатися з більшим кроком. Якщо умова (1.16) виконується із значним запасом, то наступний крок слід збільшити. Якщо на i -му елементарному відрізку досягнуто заданої похибки, то наступний крок вибирають за правилом зон:

$$h_{i+1} = \begin{cases} h_i, & \frac{\Delta}{q^{p+1}} \leq R \leq \Delta; \\ qh_i, & R < \frac{\Delta}{q^{p+1}}. \end{cases}$$

Існують і інші методи вибору кроку інтегрування.

Таким чином, автоматичний вибір кроку інтегрування призводить до того, що інтегрування ведеться з крупним кроком на ділянках плавної зміни функції $f(x)$ і з дрібним кроком — на ділянках швидкої зміни $f(x)$. Це дозволяє для заданої абсолютної Δ або відносної ε похибки зменшити загальну кількість обчислення значень $f(x)$ порівняно з методами з фіксованим кроком.

Іноді подрібнення кроку інтегрування може тривати надто довго. Тому у практичних випадках слід передбачити обмеження на кількість подрібнень чи довжину елементарного відрізка.

Як правило, для чисельного розв'язання задається відносна похибка. Однак існують ситуації, коли оцінка тільки відносної похибки за правилом Рунге може призвести до зациклювання програми. Тому поряд з оцінкою відносної похибки слід перевіряти також і абсолютну похибку і закінчувати розрахунки на поточному кроці після досягнення однієї з них. Величина абсолютної похибки задається виходячи з фізичного змісту розв'язуваної задачі.

Контрольні завдання

1. Вибрати функцію та межі інтегрування відповідно до свого варіанта.
2. Обчислити інтеграл методом Ньютона-Котеса 4-го порядку. Оцінити абсолютну та відносну похибку розв'язку.
3. Використовуючи результати виконання другого завдання, уточнити значення інтеграла за допомогою екстраполяції Річардсона.

4. Обчислити інтеграл методом Чебишова 4-го порядку. Оцінити абсолютну та відносну похибку розв'язку.

5. Обчислити інтеграл методом Гауса 4-го порядку. Оцінити абсолютну та відносну похибку розв'язку.

6. Порівняти результати виконання пп. 1 – 5.

Варіанти завдань

- | | | | |
|---|-----------------------|---|----------------------|
| 1. $0,37e^{(\sin(x))}$; | $x \in [0; 1]$. | 2. $0,5x + x \lg(x)$; | $x \in [1; 2]$. |
| 3. $(x + 1,9) \sin\left(\frac{x}{3}\right)$; | $x \in [1; 2]$. | 4. $\frac{\ln(x+2)}{x}$; | $x \in [2; 3]$. |
| 5. $\frac{3 \cos(x)}{(2x+1,7)}$; | $x \in [0; 1]$. | 6. $(2x + 0,6) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$; | $x \in [1; 2]$. |
| 7. $2,6x^2 \ln(x)$; | $x \in [1,2; 2,2]$. | 8. $(x^2 + 1) \sin(x - 0,5)$; | $x \in [0,5; 1,5]$. |
| 9. $x^2 \cos\left(\frac{x}{4}\right)$; | $x \in [2; 3]$. | 10. $\sin(0,2x + 3)(x^2 + 1)$; | $x \in [3; 4]$. |
| 11. $3x + \ln(x)$; | $x \in [1; 2]$. | 12. $4xe^x$; | $x \in [-1; 0]$. |
| 13. $3x^2 + \operatorname{tg}(x)$; | $x \in [-0,5; 0,5]$. | 14. $3x^2 + \sin(x)$; | $x \in [0; 1]$. |
| 15. $3xe^{\cos(x)}$; | $x \in [0,2; 1,2]$. | 16. $x^2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$; | $x \in [0,5; 1,5]$. |
| 17. $\frac{x^2}{(1+0,25x)}$; | $x \in [1,1; 2,1]$. | 18. $\frac{(x^3 - 0,3x)}{\sqrt{(1+2x)}}$; | $x \in [2; 3]$. |
| 19. $2e^{-x}(2 + x^3)$; | $x \in [1; 2]$. | 20. $\cos(x^2)x$; | $x \in [0; 1]$. |
| 21. $\sqrt{(1+x)} \sin(x)$; | $x \in [2; 3]$. | 22. $e^x + x^2 - 1$; | $x \in [0; 1]$. |
| 23. $(e^x + x) \sin(x)$; | $x \in [0; 1]$. | 24. $\sqrt{(3+x)} \lg(x)$; | $x \in [1; 2]$. |
| 25. $(4+x) \sin(x^2)$; | $x \in [1; 2]$. | 26. $xe^{\sin(x)}$; | $x \in [2; 3]$. |
| 27. $\sin(x) \cos(x)x$; | $x \in [2; 3]$. | 28. $\sin(x) \ln(x)$; | $x \in [1; 2]$. |

29. $\cos(x)\ln(x)$; $x \in [3; 4]$. **30.** $x^2 \lg(x)$; $x \in [2; 3]$.

2. Чисельне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь

Значна частина інженерних задач зводиться до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Розрізняють три типи задач для ЗДР: задачі Коші, крайові задачі та задачі на власні числа.

Для ЗДР першого порядку задача Коші полягає в знаходженні такого розв'язку рівняння [27]:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (2.1)$$

що задовольняє початкову умову

$$y(0) = y_0, \quad (2.2)$$

де $f(t, y)$ – задана неперервна функція двох аргументів, y_0 – задана константа.

Для диференціального рівняння m -го порядку

$$\frac{d^m y}{dt^m} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}\right) \quad (2.3)$$

задача Коші полягає в знаходженні функції $y = y(t)$, що задовольняє рівняння (2.3) і початкові умови:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0; \\ \frac{dy(0)}{dt} &= y_0^{(1)}; \\ &\dots \\ \frac{d^{m-1}y(0)}{dt^{m-1}} &= y_0^{(m-1)}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи деякі задачі, слід знайти m функцій $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$, що задовольняють систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m); \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m); \\ &\dots \\ \frac{dy_m}{dt} &= f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m)\end{aligned}\tag{2.4}$$

і початкові умови

$$\begin{aligned}y_1(0) &= y_{10}; \\ y_2(0) &= y_{20}; \\ &\dots \\ y_m(0) &= y_{m0}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Систему диференціальних рівнянь (2.4) називають нормальною [22].

Задачу Коші (2.4) з початковими умовами (2.5) можна подати у векторній формі

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{Y}}{dt} &= F(t, \mathbf{Y}); \\ \mathbf{Y}(0) &= \mathbf{Y}_0,\end{aligned}\tag{2.6}$$

де $\mathbf{Y} = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$, $F(t, \mathbf{Y}) = [f_1(t, \mathbf{Y}), f_2(t, \mathbf{Y}), \dots, f_m(t, \mathbf{Y})]^T$,

$\mathbf{Y}_0 = [y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0}]^T$.

Систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m + b_1; \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m + b_2; \\ &\dots \\ \frac{dy_m}{dt} &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mm}y_m + b_m,\end{aligned}$$

у якій a_{ij} , b_j , $i, j = \overline{1, m}$ – функції від t , називають лінійною.

Якщо ввести позначення

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix},$$

то систему лінійних диференціальних рівнянь записують у матричній формі:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}.$$

Рівняння (2.3) за допомогою заміни змінних

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \frac{dy}{dt}; \\ y_2(t) &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt}; \\ &\dots \\ y_{m-1}(t) &= \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} = \frac{dy_{m-2}}{dt}\end{aligned}$$

можна звести до вигляду (2.6). Наприклад, рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

можна записати як систему

$$\frac{dy}{dt} = y_1;$$

$$\frac{dy_1}{dt} = f(t, y, y_1).$$

Отже, задачу Коші будь-якого порядку можна звести до задачі (2.6). Слід зазначити, що методи розв'язання задачі Коші (2.1) з початковою умовою (2.2) з однаковим успіхом можна застосувати до систем (2.6). Тому надалі зупинимось на методах розв'язання задачі Коші для одного рівняння, хоча усі формули застосовні до систем диференціальних рівнянь з урахуванням того, що всі скалярні операції замінюються операціями над векторами, матрицями і тензорами.

Для чисельного розв'язання задачі Коші у змінній t вводять сітку $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ та шукають значення невідомої функції в вузлах сітки. Позначимо як $y(t)$ — точний розв'язок задачі (2.1), (2.2), а y_{i+1} — наближений розв'язок в точці $t = t_{i+1}$. Локальною похибкою розв'язку називають

$$R_i = y(t_{i+1}) - y_{i+1}. \quad (2.7)$$

Під час використання наближених методів основним є питання про збіжність. Найбільше розповсюдження отримало поняття про збіжність за умови $h_i \rightarrow 0$, де

$$h_i = t_{i+1} - t_i.$$

Говорять, що метод збігається у точці $t = t_{i+1}$, якщо $\lim_{h_i \rightarrow 0} |R_i| = 0$. Метод збігається на відрізьку $[0, t_n]$, якщо він збігається в кожній точці $t \in [0, t_n]$.

Говорять, що метод має p -ий порядок точності, якщо існує таке число $p > 0$, що $R_i = O(h_i^{p+1})$, за умови $h_i \rightarrow 0$.

2.1. Метод Ейлера

Для чисельного розв'язання задачі Коші (2.1), (2.2) розіб'ємо відрізок $[0, t_n]$, на якому шукається розв'язок, на елементарні відрізки $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, $t_0=0$. На кожному елементарному відрізку будемо шукати розв'язок у вигляді полінома першого степеня. Нехай значення функції на границях елементарного відрізка становить y_i, y_{i+1} . За інтерполяційною формулою Лагранжа

$$y(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} y_{i+1} + \frac{t-t_{i+1}}{t_i-t_{i+1}} y_i = \frac{t-t_i}{h_i} y_{i+1} - \frac{t-t_{i+1}}{h_i} y_i.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}. \quad (2.8)$$

Підставляючи (2.8) в (2.1) та замінюючи функцію $f(t,y)$ її значенням на початку елементарного відрізка, отримаємо

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(t_i, y_i). \quad (2.9)$$

В методі Ейлера рівняння (2.1) замінюється різницеvim рівнянням (2.9). Геометрично така заміна означає, що на кожному елементарному відрізку розв'язок задачі Коші шукається як пряма, тангенс кута нахилу якої дорівнює значенню функції на початку елементарного відрізка. З (2.9) випливає, що наближений розв'язок задачі Коші знаходиться явно за рекурентною формулою

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i) \quad (2.10)$$

Оцінимо локальну похибку методу Ейлера. Для цього припустимо, що в точці $t=t_i$ значення функції $y(t)$ обчислено точно, тобто $y(t_i)=y_i$. Розкладаючи функцію $y(t)$ в ряд Тейлора в околі точки $t=t_i$ і враховуючи (2.1), отримаємо

$$y(t) = y_i + f(y_i, t_i)(t - t_i) + \frac{y''(t_i)}{2}(t - t_i)^2 + \dots$$

Звідки

$$y(t_{i+1}) = y_i + f(y_i, t_i)h_i + \frac{y''(t_i)}{2}h_i^2 + \dots \quad (2.11)$$

Враховуючи (2.10), вважаючи крок інтегрування h_i малим та нехтуючи малими величинами вищих порядків із (2.7) та (2.11) отримуємо

$$R_i = \frac{y''(t_i)}{2}h_i^2.$$

Таким чином, метод Ейлера має перший порядок точності. Тому в методі Ейлера зменшення кроку h_i в два рази в чотири рази зменшує локальну похибку розв'язку.

Існують інші різновиди методу. Так, підставляючи (2.8) до (2.1) і замінюючи функцію $f(t, y)$ її значенням у кінці елементарного відрізка, отримаємо

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(y_{i+1}, t_{i+1}).$$

Звідки

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_{i+1}, y_{i+1}). \quad (2.12)$$

Для довільної функції $f(t, y)$ значення y_{i+1} не може бути виражене з (2.12) явно. Тому метод (2.12) називають неявним методом Ейлера. За використання неявного методу Ейлера, нове значення y_{i+1} визначається на основі попереднього y_i шляхом розв'язання нелінійного рівняння (2.12). Неявний метод Ейлера також має перший порядок точності. Можна показати, що похибка неявного методу Ейлера дорівнює

$$R_i = -\frac{y''(t_{i+1})}{2}h_i^2.$$

Приклад. Нехай дано задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -(t+1)y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Точним розв'язком цієї задачі є функція $y(t) = \frac{2}{(t+1)^2 + 1}$.

Необхідно обчислити таблицю значень $y(t)$ на відрізку $t \in [0,1]$ з кроком $h=0,25$, тобто для $t_0=0, t_1=0,25, t_2=0,5, t_3=0,75, t_4=1$.

Скористаємося явним методом Ейлера. Оскільки $f(t, y) = -y^2(t+1)$, то згідно з формулою (2.10)

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (-(t_i + 1)y_i^2) = y_i - h(t_i + 1)y_i^2.$$

Тоді

$$y_0 = y(0) = 1;$$

$$y_1 = y(0,25) = y_0 - h(t_0 + 1)y_0^2 = 1 - 0,25 \cdot (0 + 1) \cdot 1^2 = 0,75;$$

$$y_2 = y(0,5) = y_1 - h(t_1 + 1)y_1^2 = 0,75 - 0,25 \cdot (0,25 + 1) \cdot 0,75^2 \cong 0,574219;$$

$$y_3 = y(0,75) = y_2 - h(t_2 + 1)y_2^2 = 0,574219 - 0,25 \cdot (0,5 + 1) \cdot 0,574219^2 \cong 0,450571;$$

$$y_4 = y(1) = y_3 - h(t_3 + 1)y_3^2 = 0,450571 - 0,25 \cdot (0,75 + 1) \cdot 0,450571^2 \cong 0,361752;$$

Розв'яжемо цю ж задачу неявним методом Ейлера. Згідно з формулою (2.12) маємо

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (-(t_{i+1} + 1)y_{i+1}^2) = y_i - h(t_{i+1} + 1)y_{i+1}^2,$$

що приводить до рівняння відносно y_{i+1} :

$$(t_{i+1} + 1)hy_{i+1}^2 + y_{i+1} - y_i = 0.$$

Тоді

$$y_0 = y(0) = 1;$$

$$(t_1 + 1)hy_1^2 + y_1 - y_0 = 0 \Rightarrow (0,25 + 1) \cdot 0,25 \cdot y_1^2 + y_1 - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0,8;$$

$$(t_2 + 1)hy_2^2 + y_2 - y_1 = 0 \Rightarrow (0,5 + 1) \cdot 0,25 \cdot y_2^2 + y_2 - 0,8 = 0 \Rightarrow y_2 \cong 0,644320;$$

$$(t_3 + 1)hy_3^2 + y_3 - y_2 = 0 \Rightarrow (0,75 + 1) \cdot 0,25 \cdot y_3^2 + y_3 - 0,644320 = 0 \Rightarrow y_3 \cong 0,524132;$$

$$(t_4 + 1)hy_4^2 + y_4 - y_3 = 0 \Rightarrow (1 + 1) \cdot 0,25 \cdot y_4^2 + y_4 - 0,524132 = 0 \Rightarrow y_4 \cong 0,431175.$$

Як вже зазначалося, методи розв'язку задачі Коші (2.1), (2.2) можна застосовувати і для розв'язання систем ЗДР (2.6). Для прикладу покажемо, як застосувати до розв'язання систем ЗДР явний метод Ейлера. Нехай задано систему ЗДР з початковими умовами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + t; \\ \frac{dy}{dt} = x + y; \end{cases} \quad x(0) = x_0 = 1, \quad y(0) = y_0 = 2.$$

Розв'язок будемо шукати на відрізку $t \in [0; 0,2]$ з кроком $h = 0,1$.

Використовуючи формулу (2.10) для системи ЗДР матимемо:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \cdot (x_i + t_i) \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot (x_i + y_i) \end{cases}$$

$$t_1 = 0,1:$$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h \cdot (x_0 + t_0) \\ y_1 = y_0 + h \cdot (x_0 + y_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 0,1 \cdot (1 + 0) \\ y_1 = 2 + 0,1 \cdot (1 + 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1,1; \\ y_1 = 2,3. \end{cases}$$

$$t_2 = 0,2:$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h \cdot (x_1 + t_1) \\ y_2 = y_1 + h \cdot (x_1 + y_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1,1 + 0,1 \cdot (1,1 + 0,1) \\ y_2 = 2,3 + 0,1 \cdot (1,1 + 2,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1,22; \\ y_2 = 2,64. \end{cases}$$

2.2. Методи Рунге – Кутта

У найзагальнішому випадку метод Рунге-Кутта порядку точності p будується за рекурентною формулою [16]:

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^m c_j k_j, \quad (2.13)$$

де

$$k_j = f \left(t_i + a_j h_i, y_i + h_i \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl} k_l \right), \quad (2.14)$$

$a_1=0$, a_j та c_j – константи, b_{jl} – елементи нижньотрикутної матриці, такої, що кожне k_j отримується з попередніх значень k_l .

Формули (2.13) та (2.14) містять $\frac{m(m-1)}{2} + 2m - 1$ коефіцієнтів b_{jl} , a_j та c_j ,

що підлягають визначенню. Для того, щоб знайти ці коефіцієнти всі функції k_j розкладають в ряд Тейлора в околі точки (t_i, y_i) . Ці розклади підставляють в (2.13) і результат порівнюють з рядом Тейлора для функції $y(t_{i+1})$. Оскільки локальна похибка визначена згідно з (2.7), то накладається умова, щоб коефіцієнти біля всіх $h_i^l, l = \overline{0, p}$ в розкладах для $y(t_{i+1})$ та y_{i+1} були рівні. Ця вимога приводить до системи рівнянь відносно коефіцієнтів b_{jl} , a_j та c_j .

Як приклад, розглянемо побудову методів Рунге-Кутта другого порядку точності ($p=2$). В цьому випадку можна отримати розв'язок для коефіцієнтів b_{jl} , a_j та c_j для $m=2$. Тоді формула (2.13) перетвориться:

$$y_{i+1} = y_i + h_i (c_1 k_1 + c_2 k_2), \quad (2.15)$$

де $k_1 = f(t_i, y_i)$, $k_2 = f(t_i + a_2 h_i, y_i + h_i b_{21} k_1)$.

Розкладемо k_1 і k_2 в ряд Тейлора в околі точки (t_i, y_i) . Для цього відмітимо, що

$$f(t, y) = f(t_i, y_i) + (y - y_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} + (t - t_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + \dots$$

Тоді

$$k_1 = f(t_i, y_i), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(t_i, y_i) + (y_i + h_i b k_1 - y_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} + (t_i + a h_i - t_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + \dots = \\ &= f(t_i, y_i) + h_i b f(t_i, y_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} + a h_i \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Підставляючи (2.16) та (2.17) в (2.15), отримаємо

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i) (c_1 + c_2) + h_i^2 c_2 \left(b f(t_i, y_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} + a \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} \right) + \dots$$

Розкладемо функцію $y(t)$ в ряд Тейлора в околі точки (y_i, t_i) та знайдемо $y(t_{i+1})$. Тоді

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h_i \frac{dy(t_i)}{dt} + \frac{h_i^2}{2} \frac{d^2 y(t_i)}{dt^2} + \dots \quad (2.18)$$

Врахуємо, що

$$\frac{dy(t_i)}{dt} = f(t_i, y_i), \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(t_i)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy(t_i)}{dt} \right) = \frac{df(t_i, y_i)}{dt} = \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} \frac{dy(t_i)}{dt} + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} f(t_i, y_i) + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Підставляючи (2.19) та (2.20) в (2.18), маємо

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h_i f(t_i, y_i) + \frac{h_i^2}{2} \left(f(t_i, y_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} \right) + \dots (2.21)$$

Для того, щоб метод мав другий порядок точності ($R_i = O(h_i^3)$), вимагатимемо, щоб в різниці рівнянь (2.18) та (2.21) були відсутні доданки, які містять h_i^0 , h_i^1 та h_i^2 . Виходячи з цієї умови, коефіцієнти a , b , c_1 та c_2 повинні задовольняти систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1; \\ c_2 b = \frac{1}{2}; \\ c_2 a = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Рівняння (2.22) складають систему з 3 рівнянь відносно 4 невідомих. Виразимо b , c_1 та c_2 через $a \neq 0$. Отримаємо:

$$b = a, \quad c_2 = \frac{1}{2a}, \quad c_1 = 1 - \frac{1}{2a}. \quad (2.23)$$

Підставляючи (2.23) в (2.15) отримаємо такий узагальнений метод Рунге-Кутта другого порядку точності

$$y_{i+1} = y_i + h_i \left(\left(1 - \frac{1}{2a} \right) k_1 + \frac{1}{2a} k_2 \right), \quad (2.24)$$

де $k_1 = f(t_i, y_i)$, $k_2 = f(t_i + ah_i, y_i + h_i a k_1)$.

Широковідомим методом 2 порядку є окремий випадок методу (2.24) для $a = \frac{1}{2}$:

$$y_{i+1} = y_i + h_i k_2,$$

де $k_1 = f(t_i, y_i)$, $k_2 = f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}k_1\right)$.

Аналогічно будуються розрахункові формули методів Рунге-Кутта вищих порядків точності. При цьому відповідні системи рівнянь відносно b_{jl} , a_j та c_j для $p=2,3,4$ можуть бути розв'язані відповідно для $m=2,3,4$. Таким чином, для того, щоб побудувати метод порядку точності p для $p=2,3$ та 4 достатньо $m=p$ викликів функції $f(t,y)$. Проте для $p=5$ ця система може бути розв'язана тільки для $m \geq 6$ [22]. Таким чином, для методу Рунге-Кутта 5 порядку точності потрібно щонайменше 6 викликів функції на кожному кроці. Аналогічно для $p=6$ m повинно бути не менше 7. Це, зокрема, пояснює популярність класичного методу четвертого порядку, оскільки для того, щоб отримати додатковий порядок точності, потрібні ще два обчислення функції.

Слід відзначити, що методи Рунге-Кутта з $p > 6$ чисельно нестійкі і тому на практиці не використовуються.

Як видно з вище наведеного прикладу, вибір коефіцієнтів b_{jl} , a_j та c_j не є однозначним. Тому в літературі можна знайти формули методів Рунге-Кутта, які відрізняються одна від одної, наприклад, формули Фелберга та Кеша-Карпа [22], Кутта-Мерсона [27], або більш стійкі формули методів 4-5 порядку для $m=7$ [30]. Для чисельного розв'язання задачі Коші, особливий інтерес становлять такі формули, коли на одному й тому самому наборі функцій $k_j, j = \overline{1, m}$ можна одразу побудувати методи різних порядків точності. Це, як буде показано далі, дає змогу досить ефективно оцінити похибку розв'язку.

Серед всього різноманіття методів Рунге-Кутта 4 порядку слід також відмітити найпоширенішу модифікацію методу з найбільш простим набором коефіцієнтів b_{jl} , a_j та c_j :

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{h_i}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \\
k_1 &= f(t_i, y_i); \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i k_1}{2}\right); \\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i k_2}{2}\right); \\
k_4 &= f(t_i + h_i, y_i + h_i k_3).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Проте, слід зазначити, що використання формул (2.25) не дає змогу побудувати досить ефективні алгоритми розв'язку задачі Коші. Формули (2.25) слід використовувати тільки для напів-аналітичних розрахунків або на початкових етапах розробки програмного забезпечення для отримання первинних оцінок.

Приклад:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -(t+1)y^2; \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$t \in [0,1], \quad h = 0,5.$$

$$t_0 = 0;$$

$$y_0 = y(0) = 1;$$

$$t_1 = 0,5;$$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = -(t_0 + 1)y_0^2 = -(0 + 1) \cdot 1^2 = -1;$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h k_1}{2}\right) = -\left(t_0 + \frac{h}{2} + 1\right) \left(y_0 + \frac{h k_1}{2}\right)^2 = \\
&= -\left(0 + \frac{0,5}{2} + 1\right) \left(1 - \frac{0,5 \cdot 1}{2}\right)^2 = -0,703125;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_2}{2}\right) = -\left(t_0 + \frac{h}{2} + 1\right)\left(y_0 + \frac{hk_2}{2}\right)^2 = \\
&= -\left(0 + \frac{0,5}{2} + 1\right)\left(1 - \frac{0,5 \cdot 0,703125}{2}\right)^2 \cong -0,849171;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= f(t_0 + h, y_0 + hk_3) = -(t_0 + h + 1)(y_0 + hk_3)^2 = \\
&= -(0 + 0,5 + 1)(1 - 0,5 \cdot 0,849171)^2 \cong -0,496653;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\
&= 1 + \frac{0,5}{6}(-1 - 2 \cdot 0,703125 - 2 \cdot 0,849171 - 0,496653) \cong 0,616563;
\end{aligned}$$

$$t_2 = 1;$$

$$k_1 = f(t_1, y_1) = -(t_1 + 1)y_1^2 = -(0,5 + 1) \cdot 0,616563^2 = -0,570225;$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_1}{2}\right) = -\left(t_1 + \frac{h}{2} + 1\right)\left(y_1 + \frac{hk_1}{2}\right)^2 = \\
&= -\left(0,5 + \frac{0,5}{2} + 1\right)\left(0,616563 - \frac{0,5 \cdot 0,570225}{2}\right)^2 = -0,393194;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_2}{2}\right) = -\left(t_1 + \frac{h}{2} + 1\right)\left(y_1 + \frac{hk_2}{2}\right)^2 = \\
&= -\left(0,5 + \frac{0,5}{2} + 1\right)\left(0,616563 - \frac{0,5 \cdot 0,393194}{2}\right)^2 \cong -0,470047;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= f(t_1 + h, y_1 + hk_3) = -(t_1 + h + 1)(y_1 + hk_3)^2 = \\
&= -(0,5 + 0,5 + 1)(0,616563 - 0,5 \cdot 0,470047)^2 \cong -0,291145;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\
&= 0,616563 + \frac{0,5}{6}(-0,570225 - 2 \cdot 0,393194 - 2 \cdot 0,470047 - 0,291145) \cong \\
&\cong 0,400909;
\end{aligned}$$

Методи Ейлера та Рунге – Кутта називаються одноточковими. Це пояснюється тим, що для обчислення результату в $(i + 1)$ -й точці достатньо знати значення лише в одній попередній i -й точці.

2.3. Багатоточкові методи

В одноточкових методах значення y_{i+1} обчислюють на основі значення в одній попередній точці y_i . При цьому логічно припустити, що можна підвищити точність, якщо в розрахунку значення в точці y_{i+1} на кожному кроці бере участь не одна, а кілька попередніх точок – y_i, y_{i-1}, \dots

В загальному випадку лінійним m -кроковим різницеvim методом з постійним кроком називається система різницеvix рівнянь [3]:

$$\frac{a_0 y_{i+1} + a_1 y_i + \dots + a_m y_{i-m+1}}{h} = b_0 f_{i+1} + b_1 f_i + \dots + b_m f_{i-m+1}; i = \overline{m-1, n-1}, (2.26)$$

де a_k, b_k — чисельні коефіцієнти, що не залежать від i , $k = \overline{0, m}$, причому $a_0 \neq 0$, $f_k = f(t_k, y_k)$, $h = t_{i+1} - t_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

Метод називається лінійним, тому що кожне f_k входить до формули лінійно.

Рівняння (2.26) є рекурентним співвідношенням, за яким нове значення y_{i+1} виражається через раніше знайдені $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-m+1}$. Обчислення починається з $i = m - 1$, тобто з рівняння

$$\frac{a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + \dots + a_m y_0}{h} = b_0 f_m + b_1 f_{m-1} + \dots + b_m f_0.$$

Звідси видно, що для початку обчислень слід задати m початкових значень y_0, y_1, \dots, y_{m-1} . Значення y_0 задається умовою (2.2). Величини y_1, y_2, \dots, y_{m-1} можна обчислити використовуючи однокрокові методи, наприклад, методи Рунге-Кутта.

Метод (2.26) називається явним, якщо $b_0=0$, і, відповідно, шукане значення y_{i+1} виражається через попередні $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-m+1}$:

$$y_{i+1} = \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^m [-a_k y_{i-k+1} + h b_k f_{i-k+1}] \quad (2.27)$$

Якщо $b_0 \neq 0$, то метод називається неявним. Тоді для знаходження y_{i+1} доводиться розв'язувати нелінійне рівняння

$$y_{i+1} a_0 - b_0 h f(y_{i+1}, t_{i+1}) = \sum_{k=1}^m [-a_k y_{i-k+1} + h b_k f_{i-k+1}]. \quad (2.28)$$

Зазвичай це рівняння розв'язують методом Ньютона і задають початкове наближення $y_{i+1}^{(0)}$, що дорівнює y_i .

Слід відзначити, що коефіцієнти рівняння (2.26) задані з точністю до множника. Щоб усунути цю неоднозначність, вимагають виконання умови нормування

$$\sum_{k=0}^m b_k = 1. \quad (2.29)$$

Можна показати, що для того, аби різницевий метод (2.26) мав порядок точності p , необхідно щоб були виконані умови [3]:

$$\sum_{k=0}^m a_k = 0; \quad (2.30)$$

$$\sum_{k=0}^m k^{l-1} (k a_k + l b_k) = 0, l = \overline{1, p}. \quad (2.31)$$

Разом з умовою нормування (2.29), рівняння (2.30) і (2.31) становлять систему з $p + 2$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $2m + 2$ невідомих $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_m$.

Для того, щоб існував розв'язок цієї системи, необхідно, щоб кількість рівнянь була не більшою від кількості невідомих, тому $p \leq 2m$. Ця вимога означає, що лінійні m -крокові різницеві методи мають порядок точності не більше, ніж $2m$. Тому порядок точності неявних m -крокових методів дорівнює $2m$, коли $a_i \neq 0, b_i \neq 0, i = \overline{0, m}$, а явних — $2m - 1$, оскільки $b_0 = 0$ і невідомих в (2.29), (2.30), (2.31) на одну менше.

У практиці обчислень найбільше поширення отримали методи Адамса, які становлять частковий випадок багатоточкових методів (2.26), коли похідна $\frac{dy}{dt}$ апроксимується тільки по двох точках t_{i+1}, t_i , тобто

$$a_0 = -a_1 = 1, \quad a_k = 0, \quad k = \overline{2, m}.$$

Таким чином, методи Адамса мають вигляд

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \sum_{k=0}^m b_k f_{i-k+1}. \quad (2.32)$$

У випадку $b_0 = 0$ методи Адамса називають явними, а для $b_0 \neq 0$ — неявними.

Для методів Адамса умови (2.29), (2.31) приймають вигляд

$$l \sum_{k=1}^m k^{l-1} b_k = 1; \quad l = \overline{1, p}; \quad (2.33)$$

$$b_0 = 1 - \sum_{k=1}^m b_k. \quad (2.34)$$

Звідси видно, що найвищий порядок точності m -крокового неявного методу Адамса дорівнює $m + 1$ (кількість рівнянь p , а невідомих — $m + 1$), а найвищий порядок точності явного методу дорівнює m ($b_0=0$).

Знайдемо коефіцієнти b_k для кількох m . Розглянемо явні методи Адамса. Коефіцієнти знаходять із (2.33), (2.34), враховуючи, що $p=m$. Для $m=1$ отримуємо метод Ейлера

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_i.$$

У випадку $m=2$ система рівнянь (2.33) приймає вигляд:

$$b_1 + b_2 = 1;$$

$$2(b_1 + 2b_2) = 1.$$

Звідки $b_1 = \frac{3}{2}; b_2 = -\frac{1}{2}$.

Таким чином, для $m=2$, отримаємо явний метод Адамса другого порядку:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{3}{2} f_i - \frac{1}{2} f_{i-1}.$$

Звідки

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{3}{2} f(t_i, y_i) - \frac{1}{2} f(t_{i-1}, y_{i-1}) \right).$$

Розв'язки для інших m наведено у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1. Коефіцієнти явного методу Адамса порядку m

m	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
1	1									
2	3/2	-1/2								
3	23/12	-4/3	5/12							
4	55/24	-59/24	37/24	-3/8						
5	1901/720	-1387/360	109/30	-637/360	251/720					

6	4277/1440	-2641/480	4991/720	-3649/720	959/480	-95/288				
7	28392/ 8641	-18637/ 2520	235183/ 20160	-10754/ 945	135713/ 20160	-5603/ 2520	6054/ 19183			
8	16083/ 4480	-2281287/ 239500	242653/ 13440	-24605/ 1117	28060547/ 1614563	-2384104/ 276831	32863/ 13440	-5257/ 17280		
9	2787217/ 717463	-294002/ 24739	1929453/ 73333	-7436324/ 192949	135961/ 3576	-11884/ 473	261790/ 24463	50246/ 18867	-994/ 3371	
10	173234/ 41525	-17722/ 1225	1971119/ 53794	-4119436/ 65757	10176373/ 137186	-6963789/ 113632	843419/ 24231	-6835/ 526	122585/ 42599	-130/ 453

Коефіцієнти неявного методу Адамса знаходяться із системи (2.33), (2.34) з $p=m+1$. Наведемо формули неявних m -точкових методів Адамса для деяких значень m :

$$m = 1:$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_i, y_i));$$

$$m = 2:$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f(t_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1}));$$

$$m = 3:$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f(t_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(t_i, y_i) - 5f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_{i-2}, y_{i-2})).$$

Перевагою багатоточкових методів є висока точність розрахунку, а основними недоліками – складність оцінки похибки на кожному кроці, а щоб почати розрахунки цими методами, слід мати значення шуканої функції в кількох попередніх точках. Ці значення можна попередньо обчислити одним із одноточкових методів.

Часто, на кожному кроці розв'язання спільно використовуються два багатоточкові методи. Спочатку обчислюють прогнозоване значення y_{i+1}^n за допомогою явного методу, що називається предиктором. Знайдене значення використовується як початкове наближення для його уточнення неявним

методом, який називається коректором. Такі методи називають методами предиктор-коректор. Для $m = 3$ обчислювальна схема матиме вигляд:

$$y_{i+1}^n = y_i + \frac{h}{12}(23f(t_i, y_i) - 16f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2}));$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f(t_{i+1}, y_{i+1}^n) + 19f(t_i, y_i) - 5f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_{i-2}, y_{i-2})).$$

Схему предиктор-коректор застосовують тоді, коли застосувати неявну схему неможливо (наприклад, якщо нелінійне рівняння, яке виникає під час застосування неявної схеми надто складне). Слід однак зазначити, що такий підхід є, по суті, виконанням тільки однієї ітерації розв'язку нелінійного рівняння методом простої ітерації.

Приклад. Нехай дано задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -(t+1)y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Необхідно обчислити таблицю значень $y(t)$ на відрізку $t \in [0, 1]$, якщо $h = 0,25$.

Застосуємо трьохточковий явний метод Адамса. Використовуючи таблицю 6.1, отримаємо загальну формулу для цього методу:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f(t_i, y_i) - 16f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2})).$$

Спочатку обчислимо значення y_1, y_2 явним методом Ейлера:

$$y_0 = y(0) = 1;$$

$$y_1 = y(0,25) = y_0 - h(t_0 + 1)y_0^2 = 1 - 0,25 \cdot (0 + 1) \cdot 1^2 = 0,75;$$

$$y_2 = y(0,5) = y_1 - h(t_1 + 1)y_1^2 = 0,75 - 0,25 \cdot (0,25 + 1) \cdot 0,75^2 \cong 0,574219.$$

Після цього продовжимо розв'язок заданим методом:

$$t_3 = 0,75;$$

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + \frac{h}{12} \left(23(-(t_2 + 1)y_2^2) - 16(-(t_1 + 1)y_1^2) + 5(-(t_0 + 1)y_0^2) \right) = \\ &= 0,574219 + \frac{0,25}{12} \left(-23(0,5 + 1) \cdot 0,574219^2 + \right. \\ &\quad \left. + 16(0,25 + 1) \cdot 0,75^2 - 5(0 + 1) \cdot 1^2 \right) \cong \\ &\cong 0,467436; \end{aligned}$$

$$t_4 = 1;$$

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + \frac{h}{12} \left(23(-(t_3 + 1)y_3^2) - 16(-(t_2 + 1)y_2^2) + 5(-(t_1 + 1)y_1^2) \right) = \\ &= 0,467436 + \frac{0,25}{12} \left(-23(0,75 + 1) \cdot 0,467436^2 + 16(0,5 + 1) \cdot 0,574219^2 - \right. \\ &\quad \left. - 5(0,25 + 1) \cdot 0,75^2 \right) \cong \\ &\cong 0,375839. \end{aligned}$$

2.4. Апостеріорна оцінка похибки розв'язання задачі Коші. Автоматичний вибір кроку інтегрування.

Для чисельного розв'язання задачі Коші із заданою похибкою розв'язку використовують різні методи апостеріорної оцінки похибки в залежності від обраного методу та інших факторів. Найбільш широко застосовується правило Рунге:

$$R_i \approx \frac{y_{i+1, \frac{h}{q}} - y_{i+1, h}}{q^p - 1}, \quad (2.35)$$

де $y_{i+1, \frac{h}{q}}$ та $y_{i+1, h}$ розв'язки задачі Коші в точці $t=t_{i+1}$, отримані відповідно з кроками $\frac{h}{q}$ та h , q – ціле число, як правило рівне 2, p – порядок точності методу, що використовується, R_i – апостеріорна оцінка похибки для результату, отриманого з кроком $\frac{h}{q}$.

Приклад. Нехай дано задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -(t+1)y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Необхідно обчислити значення $y(t)$ в точці $t=1$ та оцінити похибку результату. Скористаємося явним методом Ейлера. Виберемо крок $h=0,5$. Тоді

$$y_0 = y(0) = 1;$$

$$y_1 = y(0,5) = y_0 - h(t_0 + 1)y_0^2 = 1 - 0,5 \cdot (0 + 1) \cdot 1^2 = 0,5;$$

$$y_2 = y(1)_h = y_1 - h(t_1 + 1)y_1^2 = 0,5 - 0,5 \cdot (0,5 + 1) \cdot 0,5^2 \cong 0,3125.$$

Для того, щоб скористатись правилом Рунге (2.35), необхідно обчислення виконати ще раз, але з кроком вдвічі меншим ($q=2$), тобто $h=0,25$. Такі обчислення вже були проведені в параграфі 2.1. Результатом є $y(1)_{\frac{h}{2}} = 0,361752$.

Тоді, враховуючи, що метод Ейлера має перший порядок точності ($p=1$), з формули (2.35) маємо

$$R_i \approx \frac{y(1)_{\frac{h}{2}} - y(1)_h}{2^1 - 1} = \frac{0,361752 - 0,3125}{2 - 1} = 0,049252.$$

Точним розв'язком цієї задачі Коші є функція $y(t) = \frac{2}{(t+1)^2 + 1}$. Тому точним

розв'язком в точці $t=1$ є $y(1)=0,4$. Як видно, отримана апостеріорна оцінка похибки обчислення $y(1)_{\frac{h}{2}}$ є досить близькою до дійсної. Слід відзначити, що апостеріорна оцінка похибки тим ближча до дійсної, чим менший крок h .

Під час розв'язання задачі Коші неявними методами використання правила Рунге є неефективним, оскільки в результаті зменшення кроку доводиться додатково розв'язувати q нелінійних рівнянь. Тому у разі використання неявних

методів застосовують інші методи оцінки похибки. Так, наприклад, порівняння формул для похибок явного та неявного методів Ейлера вказує, що якщо $h \rightarrow 0$, то модулі цих похибок є однаковими, але вони мають протилежний знак. Ця особливість дає змогу апостеріорно оцінити похибку неявного методу за формулою:

$$R_i \approx \frac{\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}}{2} \quad (2.36)$$

де \tilde{y}_{i+1} та y_{i+1} – розв'язки, отримані відповідно явним та неявним методом.

Приклад. Для вищенаведеної задачі Коші треба оцінити похибку неявного методу Ейлера в точці $t=1$, розв'язавши задачу з кроком $h=0,25$. Використовуючи приклад з параграфу 6.1, маємо $\tilde{y}_4=0,361752$, а $y_4=0,431175$. Тоді

$$R_i \approx \frac{0,361752 - 0,431175}{2} \cong -0,034712.$$

Як видно, ця оцінка близька до дійсної похибки.

Під час застосування методів Рунге-Кутта використовують інший підхід. В ньому оцінка похибки розраховується як різниця результатів отриманих методами з різними порядками точності:

$$R_i \approx y_{i+1} - y_{i+1}^*, \quad (2.37)$$

де y_{i+1} – розв'язок, отриманий методом з порядком точності p , а y_{i+1}^* – з порядком точності $p+1$. Як було відмічено в параграфі 6.2, існує цілий ряд методів Рунге-Кутта, коли для одних й тих самих функцій k_j можна на наборі коефіцієнтів c_j в (2.13) отримати метод 4 порядку точності, а на наборі c_j^* – 5 порядок точності. Тому використання (2.37) практично не приводить до додаткових витрат, а похибка оцінюється за формулою:

$$R_i \approx h_i \sum_{j=1}^m (c_j - c_j^*) k_j.$$

Існують і інші підходи для оцінки похибки розв'язання задачі Коші [18]. Так, наприклад, можна оцінити похідну, яка входить в формулу похибки. Для явного методу Ейлера достатньо оцінити $\frac{d^2 y(t_i)}{dt^2}$. Для цього можна скористатися апроксимацією похідної функції $f(t, y)$ скінченними різницями:

$$y''(t_i) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy(t_i)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (f(t_i, y_i)) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_i} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=t_i} = f(t_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{t=t_i} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=t_i},$$

$$\text{де } \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{t=t_i} \approx \frac{f(t_i, y_i + \Delta y_i) - f(t_i, y_i)}{\Delta y_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=t_i} \approx \frac{f(t_i + \Delta t_i, y_i) - f(t_i, y_i)}{\Delta t_i},$$

$$\Delta y_i = \sqrt{\varepsilon_{\text{маш}}} y_i, \quad \Delta t_i = \sqrt{\varepsilon_{\text{маш}}} t_i.$$

Інший спосіб оцінки похідної ґрунтується на диференціюванні інтерполяційних поліномів. Так, наприклад, для оцінки $\frac{d^2 y(t_i)}{dt^2}$ можна використовувати отримані значення y_{i-1} , y_i , y_{i+1} . Двічі диференціюючи інтерполяційний поліном Лагранжа, що проходить через точки (t_{i-1}, y_{i-1}) , (t_i, y_i) , (t_{i+1}, y_{i+1}) отримаємо

$$y''(t_i) = 2 \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} - \frac{y_i}{h_{i-1}h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i-1})} \right).$$

Наявність методів оцінки похибки на кожному кроці дає можливість підбирати крок інтегрування залежно від необхідної точності розв'язку. Для цього після знаходження оцінки похибки R_i перевіряють виконання умови:

$$|R_i| \leq \varepsilon |y_{i+1}|, \quad (2.38)$$

де ε – задана відносна похибка розв'язку.

Якщо умова (2.38) не виконується, то крок зменшують в q разів або в $\sqrt[p+1]{\frac{|R_i|}{\varepsilon|y_{i+1}|}}$ раз. Зменшення кроку виконують до тих пір, поки не виконається умова (2.38). Після цього переходять до наступного елементарного відрізка.

Крок на наступному відрізку вибирають за формулою [18]:

$$h_{i+1} = \left(\frac{\varepsilon|y_{i+1}|}{|R_i|} \right)^{\frac{1}{p+1}} h_i,$$

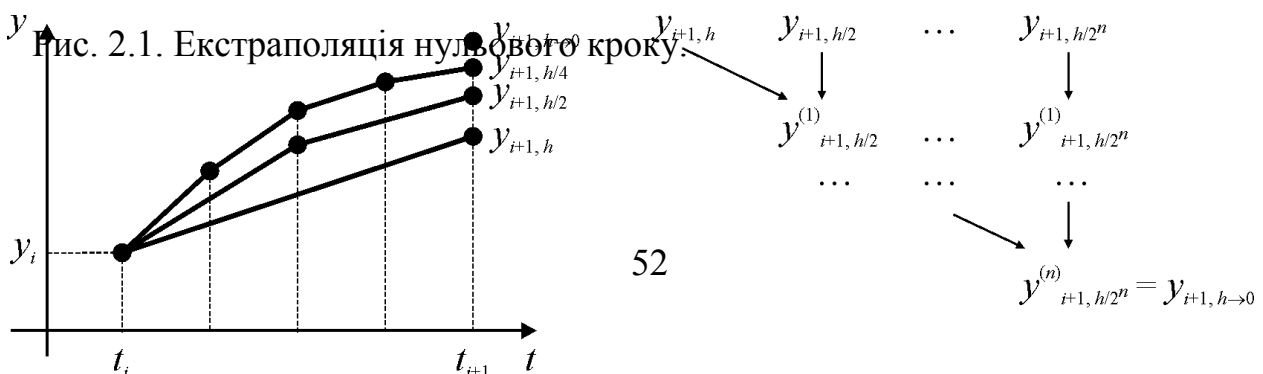
або за правилом зон [22]:

$$h_{i+1} = \begin{cases} h_i, & \frac{\varepsilon}{q^{p+1}} \leq \left| \frac{R_i}{y_{i+1}} \right| \leq \varepsilon; \\ qh_i, & \left| \frac{R_i}{y_{i+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{q^{p+1}}. \end{cases}$$

Якщо необхідно обчислити значення функції в наперед заданих вузлах, можна використовувати метод екстраполяції нульового кроку [18]. Для цього на кожному елементарному відрізку знаходять значення y_{i+1} з різними кроками, які, як правило, відрізняються один від одного в два рази. На j -му етапі екстраполяції будують послідовність розв'язків за формулами:

$$y_{i+1, h/2^k}^{(j)} = y_{i+1, h/2^k}^{(j-1)} + \frac{y_{i+1, h/2^k}^{(j-1)} - y_{i+1, h/2^{k-1}}^{(j-1)}}{2^{p+j} - 1}, \quad k = \overline{j, n}.$$

Крок послідовно зменшують доти, доки нова екстраполяція не буде відрізнятися від попередньої не більше, ніж на задану величину похибки розв'язку. При цьому остання екстраполяція є екстраполяцією нульового кроку. В цьому методі автоматичний вибір кроку не потрібний.



2.5. Жорсткі рівняння

2.5.1. Поняття про жорсткі диференціальні рівняння

Поняття жорсткого рівняння пов'язано з жорсткою умовою стійкості для різницевих схем розв'язання цих рівнянь [3,16,27]. Розглянемо задачу Коші:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad (2.39)$$

де λ – досить велике від'ємне число. Точний розв'язок задачі (2.39) має вигляд

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}. \quad (2.40)$$

Із виразу (2.40) випливає, що для будь-якого t_i і $h_i > 0$:

$$|y(t_{i+1})| = |y(t_i + h_i)| < |y(t_i)|. \quad (2.41)$$

Застосуємо для розв'язання задачі (2.39) явний метод Ейлера:

$$y_{i+1} = (1 + \lambda h_i) y_i = (1 + \lambda h_i)^i y_0. \quad (2.42)$$

Із виразу (2.42) випливає, що умова (2.41) виконується, якщо

$$|1 + \lambda h_i| < 1.$$

Отже, процес (2.42) буде стійким для виконання співвідношення (2.41) тільки за умови, що

$$h_i \leq \frac{2}{|\lambda|}. \quad (2.43)$$

За великих значень λ крок інтегрування жорстко обмежують і вибирають, виходячи не стільки з умови забезпечення заданої похибки розв'язку, а так, щоб задовольнити вираз (2.43).

Жорсткі рівняння виникають зазвичай в задачах, характерною особливістю яких є повільна зміна їх розв'язків за наявності швидко згасаючих збурень. Наприклад, задачі на визначення перехідних характеристик електронних схем часто є жорсткими.

Для кількісної оцінки жорсткості рівняння вводять коефіцієнт жорсткості s . Коефіцієнт жорсткості для задачі (2.39) залежить не тільки від $|\lambda|$, але й від довжини відрізка інтегрування:

$$s = |\lambda| t_n,$$

де t_n – права границя відрізка інтегрування. Справді, розглянемо розв'язання задачі (2.39) на відріжку $t \in [0, t_n]$. Пронормуємо відрізок інтегрування, для чого уведемо безрозмірну змінну $\tilde{t} = \frac{t}{t_n}$. Тоді задача (2.39) прийме вигляд:

$$\frac{dy}{d\tilde{t}} = \lambda t_n y, \quad y(0) = y_0, \quad \tilde{t} \in [0, 1].$$

Отже саме добуток $|\lambda| t_n$ буде визначати жорсткість задачі (2.39).

Для системи диференціальних рівнянь жорсткість можна оцінити як

$$s = \frac{\max_{i, t \in [0, t_n]} (-\operatorname{Re} \lambda_i(t))}{\min_{i, t \in [0, t_n]} |\operatorname{Re} \lambda_i(t)|},$$

де λ_i — власні числа матриці Якобі системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння (2.1). Розкладемо функцію $f(t, y)$ в ряд Тейлора в околі точки $y = 0$.

$$f(y, t) = f(0, t) + y \frac{df(t, 0)}{dy} + \frac{y^2}{2!} \frac{d^2 f(t, 0)}{dy^2} + \dots$$

Тоді рівняння (2.1) можна переписати у вигляді:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)y + \lambda_2(t)y^2 + \dots, \quad (2.44)$$

де $\lambda_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dy^k}$.

Можна показати, що на стійкість розв'язання рівняння (2.44) основний вплив має другий доданок в правій частині. Тому нелінійне рівняння (2.1) слід розглядати як жорстке, якщо для деякого $t \in [0, t_n]$ величина $\lambda_1(t)$ виявиться великою за модулем і негативною. Тому коефіцієнт жорсткості рівняння (2.1) можна визначити як:

$$s = t_n \max_{t \in [0, t_n]} \left(-\frac{df}{dy} \right).$$

Розглянемо задачу Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y}. \quad (2.45)$$

Можна показати, що загальне рішення рівняння (2.45) подається у вигляді:

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{X}_i e^{\lambda_i t}, \quad (2.46)$$

де c_i – сталі інтегрування, \mathbf{X}_i, λ_i – власні вектори і власні числа матриці розмірності $m \times m$. Дійсно, будемо шукати частинний розв'язок задачі (2.45) у вигляді:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X} e^{\lambda t}, \quad (2.47)$$

де \mathbf{X} – сталий вектор. Підставляючи (2.47) у (2.45), отримаємо задачу на власні значення і власні вектори матриці \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}.$$

А отже, якщо (2.47) є розв'язком задачі (2.45), то \mathbf{X}, λ повинні бути власними векторами і власними числами матриці \mathbf{A} .

З (2.46) випливає, що якщо для будь-якого i $\operatorname{Re} \lambda_i \ll -1$, то в розв'язку будуть присутні складові, що швидко змінюються, які визначають перехідну ділянку. Як і в прикладі (2.39), умова стійкості (2.41) і тут не дає змогу інтегрувати з кроком h_i , що не відповідає вимозі:

$$h_i < \frac{2}{\max_i (-\operatorname{Re} \lambda_i)}.$$

Коефіцієнт жорсткості системи (2.45) визначається як:

$$s = \frac{\max_i (-\operatorname{Re} \lambda_i)}{\min_i |\operatorname{Re} \lambda_i|}.$$

Розглянемо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь (2.6). Розкладаючи функцію $F(t, \mathbf{Y})$ в ряд Тейлора в околі точки $\mathbf{Y} = 0$, рівняння (2.6) можна переписати у вигляді:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(t, 0) + \mathbf{J}(t, 0)\mathbf{Y} + \dots,$$

де $\mathbf{J}(t, 0)$ – матриця Якобі для функції $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ у точці $\mathbf{Y} = 0$.

Нехай $\lambda_i(t)$ – власні числа матриці Якобі $\mathbf{J}(t, 0)$. Тоді коефіцієнт жорсткості системи (2.6) може бути визначений як:

$$s = \frac{\max_{i, t \in [0, t_n]} (-\operatorname{Re} \lambda_i(t))}{\min_{i, t \in [0, t_n]} |\operatorname{Re} \lambda_i(t)|}.$$

2.5.2. Методи розв'язання жорстких диференціальних рівнянь

Обмеження (2.43) під час використання явних методів призводить до великих обчислювальних затрат через малий крок інтегрування, тому загальним підходом до розв'язання жорстких задач є використання неявних схем. Незважаючи на потребу розв'язання систем нелінійних рівнянь, за рахунок можливості значного збільшення кроку інтегрування загальний обсяг обчислень може бути значно меншим, ніж для явних методів.

Продемонструємо використання неявного метода інтегрування на прикладі задачі (2.39). Використовуючи неявний метод Ейлера, отримаємо

$$y_{i+1} = y_i + h_i \lambda y_{i+1}.$$

Звідки

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - \lambda h_i} = \frac{y_i}{1 + |\lambda| h_i}. \quad (2.48)$$

Як видно, розв'язок (2.48) буде стійким щодо виконання умови (2.41) для будь-якого значення h_i .

Як приклад, розглянемо розв'язання задачі

$$\frac{dy}{dt} = -100(y-1), y(0) = 0$$

неявним методом Ейлера з кроком $h_i = 0.1$, що не відповідає вимозі (2.43).

Результати зведено в таблицю:

Точний розв'язок	Явний метод Ейлера	Неявний метод Ейлера
$y(t) = 1 - e^{-100t}$	$y_{i+1} = y_i + h(-100(y_i - 1))$	$y_{i+1} = \frac{y_i + 100h}{1 + 100h}$
$y(0.1) = 0.9999546$	$y_1 = 10$	$y_1 = \frac{0 + 10}{1 + 10} = \frac{10}{11} = 0.9090909$
$y(0.2) = 0.9999999$	$y_2 = -80$	$y_2 = \frac{\frac{10}{11} + 10}{11} = 0.9917354$

$$\begin{array}{lll}
y(0.3) = 1.0 & y_3 = 730 & y_3 = \frac{0.9917354 + 10}{11} = 0.9992486 \\
y(0.4) = 1.0 & y_4 = -6560 & y_4 = \frac{0.9992486 + 10}{11} = 0.9999316
\end{array}$$

На сьогодні часто використовують метод Гіра у вигляді неявної схеми інтегрування [3]:

$$\sum_{k=0}^m a_k y_{i-k+1} = hf(y_{i+1}, t_{i+1}), \quad (2.49)$$

яка є окремим випадком багатоточкового методу (2.26) за умови

$$b_i = 0, i = \overline{1, m}, b_0 = 1. \quad (2.50)$$

Для метода (2.49), який має порядок точності $p = m$, сталі $a_i, i = \overline{0, m}$ можуть бути знайдені з системи рівнянь (2.30), (2.31) з урахуванням (2.50). Розв'язки цієї системи наведено у таблиці:

Таблиця 2.2. Коефіцієнти методу Гіра порядку m

m	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	1	-1									
2	3/2	-2	1/2								
3	11/6	-3	3/2	-1/3							
4	25/12	-4	3	-4/3	1/4						
5	137/60	-5	5	-10/3	5/4	-1/5					
6	49/20	-6	15/2	-20/3	15/4	-6/5	1/6				
7	363/140	-7	21/2	-35/3	35/4	-21/5	7/6	-1/7			
8	761/280	-8	14	-56/3	35/2	-56/5	14/3	-8/7	1/8		
9	7129/2520	-9	18	-28	63/2	-126/5	14	-36/7	9/8	-1/9	
10	7381/2520	-10	45/2	-40	105/2	-252/5	35	-120/7	45/8	-10/9	1/10

Найбільш часто метод Гіра використовують як метод предиктор-коректор. Як коректор використовують (2.49), а предиктор будують з (2.26) за умови

$$b_1 = 1, b_i = 0, i = \overline{0, 2, m}, \quad (2.51)$$

тобто, предиктор будують на основі рекурентних співвідношень:

$$\tilde{y}_{i+1} = \frac{1}{\tilde{a}_0} \left(hf(t_i, \tilde{y}_i) - \sum_{k=1}^m \tilde{a}_k y_{i-k+1} \right),$$

де сталі $\tilde{a}_i, i = \overline{1, m}$ знаходять з системи рівнянь (2.30), (2.31) з урахуванням (2.51).

Деякі розв'язки цієї системи для предиктора методу Гіра порядку точності $p = m$ наведено у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3. Коефіцієнти предиктора методу Гіра порядку m

m	\tilde{a}_0	\tilde{a}_1	\tilde{a}_2	\tilde{a}_3	\tilde{a}_4	\tilde{a}_5	\tilde{a}_6	\tilde{a}_7	\tilde{a}_8	\tilde{a}_9	\tilde{a}_{10}
1	1	-1									
2	1/2	0	-1/2								
3	1/3	1/2	-1	1/6							
4	1/4	5/6	-3/2	1/2	-1/12						
5	1/5	13/12	-2	1	-1/3	1/20					
6	1/6	77/60	-5/2	5/3	-5/6	1/4	-1/30				
7	1/7	29/20	-3	5/2	-5/3	3/4	-1/5	1/42			
8	1/8	223/140	-7/2	7/2	-35/12	7/4	-7/10	1/6	-1/56		
9	1/9	481/280	-4	14/3	-14/3	7/2	-28/15	2/3	-1/7	1/72	
10	1/10	4609/2520	-9/2	6	-7	63/10	-21/5	2	-9/14	1/8	-1/90

Приклад. Нехай дано задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -(t+1)y^2; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Необхідно обчислити таблицю значень $y(t)$ на відрізку $t \in [0, 1]$ методом Гіра 3-го порядку, якщо $h = 0,25$.

Використовуючи таблицю 6.2 отримаємо з (2.49) загальну формулу для цього методу:

$$\frac{11}{6} y_{i+1} - 3y_i + \frac{3}{2} y_{i-1} - \frac{1}{3} y_{i-2} - hf(t_{i+1}, y_{i+1}) = 0.$$

Спочатку обчислимо значення y_1, y_2 неявним методом Ейлера:

$$y_0 = y(0) = 1;$$

$$(t_1 + 1)hy_1^2 + y_1 - y_0 = 0 \Rightarrow (0,25 + 1) \cdot 0,25 \cdot y_1^2 + y_1 - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0,8;$$

$$(t_2 + 1)hy_2^2 + y_2 - y_1 = 0 \Rightarrow (0,5 + 1) \cdot 0,25 \cdot y_2^2 + y_2 - 0,8 = 0 \Rightarrow y_2 \cong 0,644320.$$

Після цього продовжимо розв'язок заданим методом:

$$t_3 = 0,75;$$

$$\frac{11}{6}y_3 - 3y_2 + \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{3}y_0 - h(-(t_3 + 1)y_3^2) = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,25(0,75 + 1)y_3^2 + \frac{11}{6}y_3 - 3 \cdot 0,644320 + \frac{3}{2} \cdot 0,8 - \frac{1}{3} \cdot 1 = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_3 \cong 0,517665;$$

$$t_4 = 1;$$

$$\frac{11}{6}y_4 - 3y_3 + \frac{3}{2}y_2 - \frac{1}{3}y_1 - h(-(t_4 + 1)y_4^2) = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,25(1 + 1)y_4^2 + \frac{11}{6}y_4 - 3 \cdot 0,517665 + \frac{3}{2} \cdot 0,644320 - \frac{1}{3} \cdot 0,8 = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_4 \cong 0,417772;$$

2.6. Крайові задачі

Часто фізичні задачі зводять до диференціального рівняння m -го порядку

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right), \quad (2.52)$$

де $y(x)$ – деяка фізична величина, визначена на відрізку $[a, b]$, що описує певний процес. Часто відома поведінка процесу на кінцях відрізка $[a, b]$. Тому замість початкових умов у загальному випадку задають умови типу

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left[\alpha_{ij} \frac{d^i y(a)}{dx^i} + \beta_{ij} \frac{d^i y(b)}{dx^i} \right] = \gamma_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.53)$$

де α_{ij} , β_{ij} , γ_j – сталі. Наприклад, для диференціального рівняння 2-го порядку задають умови на кінцях $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$. Таку задачу називають крайовою задачею першого класу або задачею із закріпленими кінцями.

Аналогічно поставлено крайову задачу для системи диференціальних рівнянь. Методи розв'язання крайових задач відрізняються від методів розв'язання задачі Коші і поділені на два загальних класи – методи зведення крайових задач до задач Коші [1, 27] та спеціальні методи, призначені для розв'язання власне крайових задач [27].

2.6.1. Зведення крайових задач до задач Коші

Подамо крайову задачу із виразів (2.52) і (2.53) для диференціального рівняння m -го порядку у вигляді:

$$Ly = f(x); \quad (2.54)$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left[\alpha_{ij} \frac{d^i y(0)}{dx^i} + \beta_{ij} \frac{d^i y(l)}{dx^i} \right] = \gamma_j, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (2.55)$$

де L – диференціальний оператор, а α_{ij} , β_{ij} , γ_j – сталі.

Задачу (2.54), з умовою (2.55) найпростіше звести до задачі Коші, якщо L – лінійний диференціальний оператор

$$L = a_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x).$$

У цьому випадку розв'язок шукають у вигляді

$$y(x) = z_0(x) + \sum_{k=1}^m c_k z_k(x), \quad (2.56)$$

де $z_k(x)$ знаходять з $(m + 1)$ задачі Коші

$$Lz_0 = f(x), \quad z_0^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, m-1};$$

$$Lz_k = 0, \quad z_k^{(i)}(0) = \begin{cases} 0, & i \neq k-1 \\ 1, & i = k-1 \end{cases}, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (2.57)$$

Після розв'язання задач Коші (2.57) на відрізку $[0, l]$, вираз (2.56) підставляють у вираз (2.55) і одержують СЛАР з m рівнянь відносно m невідомих c_k , $k = \overline{1, m}$. Розв'язавши СЛАР з (2.56), знаходять розв'язок задач (2.54) з умовою (2.55).

Приклад:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = x;$$

$$y(0) = 1;$$

$$y(1) = 2.$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$y(x) = z_0(x) + c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x),$$

де $z_0(x)$ – розв'язок неоднорідної задачі Коші з нульовими початковими умовами, а $z_1(x), z_2(x)$ – розв'язки однорідних задач Коші з ненульовими початковими умовами відповідно до (2.57).

Із розв'язків задач Коші на відрізку $[0, 1]$

$$\frac{d^2 z_0}{dx^2} + 4z_0 = x, \quad z_0(0) = 0, \quad z_0'(0) = 0;$$

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} + 4z_1 = 0, \quad z_1(0) = 1, \quad z_1'(0) = 0;$$

$$\frac{d^2 z_2}{dx^2} + 4z_2 = 0, \quad z_2(0) = 0, \quad z_2'(0) = 1.$$

отримуємо $z_0(x), z_1(x), z_2(x)$. Далі знаходимо сталі c_1 та c_2 .

З першої крайової умови маємо

$$0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

З другої умови:

$$z_0(1) + c_1 z_1(1) + c_2 z_2(1) = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{2 - z_0(1) - z_1(1)}{z_2(1)}.$$

Якщо L – нелінійний диференціальний оператор, то для зведення крайової задачі до задачі Коші застосовують метод «стрільби». Для цього розв'язок $y(x)$ шукають у вигляді

$$y = z(x),$$

де $z(x)$ – розв'язок задачі Коші

$$Lz = f(x); \tag{2.58}$$

$$\frac{d^i z(0)}{dx^i} = z_i, i = \overline{0, m-1}. \tag{2.59}$$

Значення z_i у початковій умові (2.59) підбирають такими, щоб задовольнити (2.55). У цьому випадку крайові умови (2.55) разом з (2.58) і (2.59) утворюють систему m нелінійних рівнянь щодо m невідомих $z_i, i = \overline{0, m-1}$. Останній розв'язок (2.58) і є розв'язком задачі (2.54) з умови (2.55).

Приклад. Припустимо, що потрібно розв'язати задачу

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

за умов:

$$y(0) = y_0;$$

$$y(l) = y_l.$$

Можна застосувати такий ітераційний метод [24]:

1) вибирати ξ , що апроксимує $y'(0)$, тобто покласти

$$\frac{dz(0)}{dx} = \xi;$$

2) розв'язати задачу Коші:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right);$$

$$z(0) = y_0;$$

$$\frac{dz(0)}{dx} = \xi.$$

3) якщо $|z(l) - y_l| < \varepsilon$, де ε – задана похибка, то покласти $y(x) \approx z(x)$, в іншому випадку – змінити ξ (виконати ітерацію розв'язку нелінійного рівняння) і повернутися до пункту 2).

2.6.2. Метод скінченних різниць

Поширеним методом розв'язання крайових задач є метод скінченних різниць (МСР). В основі МСР лежить апроксимація похідних в операторі L (2.54) і в крайових умовах (2.55) скінченними різницями, а неперервної функції $f(x)$ – сітковою функцією, визначеною у вузлах відрізка $[0, l]$ [27]. Розглянемо найпростіший випадок, коли вузли сіткової функції – рівновіддалені. Для цього відрізок $[0, l]$ ділять на $n \geq m+1$ рівних відрізків вузлами $x_0 = 0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh$. Розв'язання задачі (2.54) за (2.55) зводиться до визначення значень функцій у вузлах $y_i = y(x_i)$.

Один зі способів різницевої апроксимації похідних побудований на диференціюванні інтерполяційних формул. Так, для одержання скінченно-різницевої апроксимації похідної $y_i^{(j)} = \frac{d^j y(x_i)}{dx^j}$ будуємо інтерполяційний

поліном Лагранжа $P_k(x), k \geq j$, який проходить через $k + 1$ точку $y_{i-\left[\frac{k+1}{2}\right]}$,

$$y_{i-\left[\frac{k+1}{2}\right]+1}, \dots, y_i, \dots, y_{i+\left[\frac{k+1}{2}\right]-1}, y_{i+\left[\frac{k+1}{2}\right]}.$$

Тоді

$$y_i^{(j)} = \frac{d^j}{dx^j} P_k(x_i).$$

Похибка такої апроксимації оцінюється як

$$R_i^{(j)} \sim f^{(k)}(\xi) h^{k+1},$$

$$\text{де } \xi \in \left[x_{i-\left[\frac{k+1}{2}\right]}, x_{i+\left[\frac{k+1}{2}\right]} \right].$$

Як приклад, знайдемо скінченно різницеву апроксимацію першої і другої похідних функції $y(x)$ у точці $x = x_i$, побудовану в трьох точках. Побудуємо поліном Лагранжа, що проходить через точки $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2} y_{i-1} - \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h^2} y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h^2} y_{i+1}.$$

Тоді

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{d}{dx} P_2(x_i) = \frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2h};$$

$$\frac{d^2 y(x_i)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} P_2(x_i) = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

Похибкою цих апроксимацій є $O(h^2)$.

У методі скінченних різниць диференціальне рівняння (2.54) замінюється скінченно різницеvими рівняннями, записаними для $n - m + 1$ внутрішнього вузла відрізка $[0, l]$. Граничні умови (2.55) замінюються m скінченно різницеvими рівняннями. У підсумку одержуємо СЛУ (СЛАУ, якщо L – лінійний диференціальний оператор) з $n + 1$ рівняння відносно $n + 1$ невідомих $y_i, i = \overline{0, n}$.

Похибка розв'язку методом скінченних різниць відповідає найбільшій похибці апроксимації похідних у (2.54) і (2.55).

Приклад:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} + y &= x; \\ y(0) &= 0; \\ y(1) &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Точний розв'язок:

$$y(x) = -\frac{2 \sin x}{3 \sin 1} + x.$$

Поділимо відрізок $[0, 1]$ на три рівні відрізки. Тоді $h = \frac{1}{3}$, $x_0 = 0$,

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1.$$

$$\text{Шукаємо } y_0 = y(0), \quad y_1 = y\left(\frac{1}{3}\right), \quad y_2 = y\left(\frac{2}{3}\right), \quad y_3 = y(1).$$

Використовуючи скінченно різницеву апроксимацію $y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$,

запишемо скінченно різницеве рівняння для вузлів x_1, x_2 :

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + y_1 = x_1; \quad -17y_1 + 9y_2 = \frac{1}{3};$$

$$\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + y_2 = x_2; \quad 9y_1 - 17y_2 = -\frac{7}{3}.$$

З крайових умов:

$$y_0 = 0;$$

$$y_3 = \frac{1}{3}.$$

Одержимо систему чотирьох рівнянь стосовно чотирьох невідомих y_0, y_1, y_2, y_3 . Розв'язуючи її, одержимо:

$$y_1 = \frac{23}{312} \cong 0,0737; \quad y\left(\frac{1}{3}\right) \cong 0,0741;$$

$$y_2 = \frac{55}{312} \cong 0,1763; \quad y\left(\frac{2}{3}\right) \cong 0,1768.$$

2.6.3. Проекційні методи розв'язання крайових задач

Подамо крайові умови (2.55) у вигляді

$$L_s y = B_s, \quad (2.60)$$

де L_s – векторний лінійний диференціальний оператор, j -й елемент якого дорівнює

$$L_{sj} = \sum_{i=0}^{m-1} \left[\alpha_{ij} \frac{d^i}{dx^i} \Big|_{x=0} + \beta_{ij} \frac{d^i}{dx^i} \Big|_{x=l} \right];$$

$B_s = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}]^T$ – вектор сталих величин.

Для побудови проекційних методів уведемо дві повні системи лінійно-незалежних функцій [31] – базисну (координатну) $\{\varphi_i(x)\}$ і проекційну (вагову) $\{\psi_i(x)\}$ [25]. Подамо розв'язок задачі (2.54) з умовою (2.60) у вигляді розвинення за системою базисних функцій:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x), \quad (2.61)$$

де c_i – сталі, які треба визначити.

Підставивши вираз (2.61) у (2.54) і (2.60), одержимо:

$$L \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) - f(x) = R(x);$$

$$L_s \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) - B_s = 0, \quad (2.62)$$

де $R(x)$ – відхил розв'язку, що залежить від різниці точного розв'язку і подання (2.61). Сталі c_i вибирають так, щоб відхил дорівнював нулю. Тотожне обернення відхилу в нуль під час чисельного розв'язання задачі, очевидно, неможливе. Алгоритм проєкційних методів передбачає мінімізацію відхилу з тим, щоб точний і наближений розв'язок якнайменше відрізнялися один від одного.

Замість обернення відхилу в нуль вимагають, щоб оберталися в нуль усі проєкції відхилу на множину проєкційних функцій $\{\psi_j(x)\}$. Якщо цю вимогу виконано, усі скалярні добутки $(R(x), \psi_j(x))$, $j = \overline{1, \infty}$ дорівнюють нулю. Звідси

$$\left(L \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x), \psi_j(x) \right) - (f(x), \psi_j(x)) = 0, \quad (2.63)$$

де $j = \overline{1, \infty}$.

У загальному випадку рівняння (2.62) і (2.63) є системою нелінійних рівнянь відносно невідомих c_i . Розв'язавши цю систему, з (2.61) знаходять розв'язок крайової задачі. Описаний алгоритм відомий як «метод моментів» (метод Гальоркіна, метод Гальоркіна – Петрова) і є найважливішим із проєкційних методів. Відомі окремі випадки методу моментів, що мають спеціальні назви. Так, у методі Гальоркіна – Бубнова базисна система функцій збігається з проєкційною, тобто $\psi_i(x) = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, \infty}$. У методі найменших квадратів (МНК) $\psi_i(x) = L\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, \infty}$.

Нескінченну систему (2.62) з умовою (2.63) зазвичай розв'язують методом редукції. При цьому в розвиненні (2.61) утримують скінченне число $n > m$ членів:

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$$

і потребують обернення в нуль проекційного відхилю на $n - m$ перших проекційних функцій. У підсумку одержують систему з n рівнянь щодо n невідомих c_i , $i = \overline{1, n}$. Потім n поступово збільшують, доки максимальне відхилення нового розв'язку від попереднього не буде перевищувати заданої похибки розв'язку

$$\max_{x \in [0, l]} |y_{n_1}(x) - y_{n_2}(x)| < \xi. \quad (2.64)$$

Якщо для деяких n_1, n_2 умова (2.64) виконується, то кажуть, що проекційний метод збігається. Якщо з ростом n $|y_{n_1}(x) - y_{n_2}(x)|$ збільшується, то кажуть, що метод розбігається і є нестійким.

У багатьох задачах задають однорідні крайові умови, тобто такі, що одержані з умов (2.60) для $B_s = 0$. Крім того, багато крайових умов можна звести до однорідних за допомогою заміни шуканих функцій [32]. У цьому випадку підбирають таку систему базисних функцій, у якій кожна з $\varphi_i(x)$ задовольняє (2.60). Отже, і (2.61) буде задовольняти крайові умови. Тоді проекційний метод зводиться тільки до розв'язку (2.63).

Якщо L – лінійний диференціальний оператор, то $L \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i L \varphi_i(x)$ і

(2.63) зводиться до СЛАР відносно c_i , $i = \overline{1, \infty}$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} c_i = b_j, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (2.65)$$

де $a_{ij} = (L \varphi_i(x), \psi_j(x))$, $b_j = (f(x), \psi_j(x))$.

Розв'язують СЛАР (2.65) методом редукції.

Інший спосіб побудови проекційних методів оснований на методі Рітца. У теорії варіаційного числення доводиться, що якщо $y(x)$ є розв'язком рівняння

(2.54) з симетричним додатньо-визначеним оператором L , то ця функція зводиться до мінімуму функціонал енергії [25]:

$$F(x) = (Ly, y) - 2 \operatorname{Re}(y, f(x)). \quad (2.66)$$

Підставляючи рівняння (2.61) у (2.66), одержимо

$$F(y) = F(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots). \quad (2.67)$$

Коефіцієнти c_i визначають з умови існування мінімуму функціонала (2.67)

$$\frac{\partial F(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)}{\partial c_j} = 0, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (2.68)$$

яка приводить до системи рівнянь щодо невідомих c_i . Якщо L – лінійний диференціальний оператор, то (2.68) являє собою СЛАР, що збігається з методом Гальоркіна – Бубнова.

Приклад:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = x; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = \frac{1}{3}.$$

Зведемо задачу до однорідних крайових умов. Для цього шукаємо функцію $y(x)$ у вигляді

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \frac{x}{3}.$$

Тоді крайова задача щодо $\tilde{y}(x)$ набуває вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{dx^2} + \tilde{y} = \frac{2}{3}x; \quad \tilde{y}(0) = 0; \quad \tilde{y}(1) = 0.$$

Як координатний базис використаємо повну систему функцій $\{\sin(i\pi x)\}$.

Отже, будемо шукати розв'язок у вигляді

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin(i\pi x).$$

Оскільки кожна з функцій $\sin(i\pi x)$ задовольняє крайові умови, то необхідно підібрати коефіцієнти c_i так, щоб задовольнити диференціальне рівняння. Використовуємо метод Гальоркіна – Бубнова. Підставляючи розвинення для $\tilde{y}(x)$ у вихідне диференціальне рівняння, одержуємо:

$$\sum_{i=1}^{\infty} [c_i(1-i^2\pi^2)\sin(i\pi x)] - \frac{2}{3}x = 0.$$

Оскільки $\int_0^1 \sin(i\pi x)\sin(j\pi x)dx = 0$ для $i \neq j$, з умови рівності нулю проекції

відхилу на систему функцій $\{\sin(i\pi x)\}$ одержуємо:

$$c_i(1-i^2\pi^2) \int_0^1 \sin^2(i\pi x)dx - \int_0^1 \frac{2}{3}x\sin(i\pi x)dx = 0, \quad i = \overline{1, \infty}.$$

Обчислюючи інтеграли, знаходимо:

$$\begin{aligned} a_{ij}c_i &= b_i, \quad i = \overline{1, \infty}; \\ a_{ij} &= \frac{1}{2}(1-i^2\pi^2), \quad b_i = \frac{2(-1)^{i+1}}{3i\pi}; \\ c_i(1-i^2\pi^2) \frac{1}{2} &= \frac{2(-1)^{i+1}}{3i\pi}, \quad i = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи СЛАР, маємо

$$c_i = \frac{b_i}{a_{ij}} = \frac{4(-1)^{i+1}}{3i\pi(1-i^2\pi^2)}.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n(x) &\approx \sum_{i=1}^n \frac{4(-1)^{i+1}}{3i\pi(1-i^2\pi^2)} \sin(i\pi x); \\ y_n(x) &\approx \sum_{i=1}^n \frac{4(-1)^{i+1}}{3i\pi(1-i^2\pi^2)} \sin(i\pi x) + \frac{x}{3}, \end{aligned}$$

де $\tilde{y}_n(x)$ та $y_n(x)$ – n -ті наближення до розв'язку.

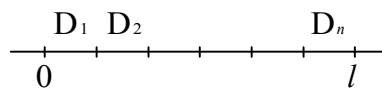
n	$y_n(1/3)$	$y_n(2/3)$
1	0,06967	0,18078
2	0,07445	0,17601
3	0,07445	0,17601
4	0,07386	0,17659
5	0,074161	0,17689

2.6.4. Метод скінченних елементів розв'язання крайових задач

Метод скінченних елементів (МСЕ) належить до групи проєкційних методів. Однак як базисні функції в ньому використовують спеціальні фінітні функції [33, 34], відмінні від нуля тільки на невеликому відрізку, на якому шукається розв'язок задачі. Фінітні функції будують у такий спосіб:

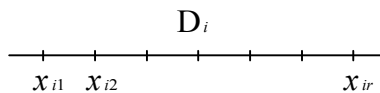
- 1) відрізок $[0, l]$ розбивають на скінченне число n відрізків $D_i, i = \overline{1, n}$,

які не перетинаються. Ці



відрізки називаються скінченними елементами;

- 2) у кожному скінченному елементі фіксуються $r \geq m + 1$ точок (вузлів) $x_{ij}, j = \overline{1, r}$, що можуть розташовуватися як усередині елемента, так і на його кінцях;



- 3) у кожному скінченному елементі D_i вводиться r базисних функцій $\varphi_{ij}(x)$,

$j = \overline{1, r}$, які дорівнюють нулю поза цим елементом і мають властивість

$$\varphi_{ij}(x_{ik}) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad (2.69)$$

яка дозволяє записати наближений розв'язок у межах елемента D_i у вигляді

$$y(x) = \sum_{j=1}^r y_{ij} \phi_{ij}(x),$$

де y_{ij} – значення $\phi_{ij}(x)$ у вузлах x_{ij} .

Множину точок, у яких $\phi_{ij}(x) \neq 0$, називають носієм функції. Оскільки поза елементом D_i $\phi_{ij}(x) \equiv 0$ (носії сусідніх елементів не перетинаються),

то скінченно-елементна апроксимація функції $y(x)$ на усьому відрізку $[0, l]$ має вигляд

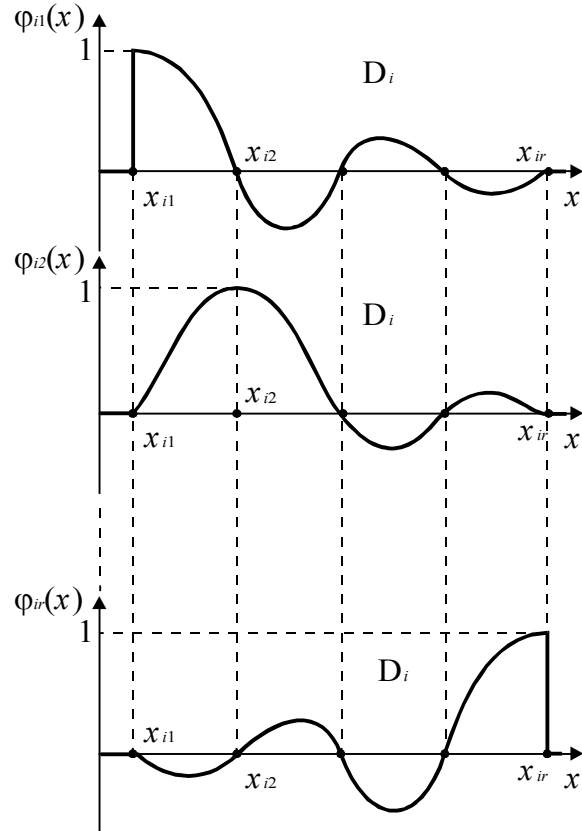
$$y(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r y_{ij} \phi_{ij}(x). \quad (2.70)$$

Вираз (2.70) забезпечує неперервність функції $y(x)$ і, можливо, її похідних до деякого порядку у вузлах, розташованих на кінцях суміжних елементів. Точність його збільшується як за рахунок використання більшого числа базисних функцій, так і за рахунок дрібнішого розбиття області на скінченні елементи зі збереженням постійного числа базисних функцій у кожному з них.

У виразі (2.70) значення функції в тому самому вузлі, що належить двом сусіднім кінцевим елементам, повторюється. Тому (2.70) можна подати так:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r y_{ij} \phi_{ij}(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} y_{ir} (\phi_{ir}(x) + \phi_{i+1,1}(x)). \quad (2.71)$$

Підставляючи формулу (2.71) у (2.60) і враховуючи, що в розвиненні (2.71) залишаться тільки базисні функції, носіями яких є елементи D_1 і D_n , що лежать на межах, одержимо m рівнянь:



$$L_s \left(\sum_{j=1}^r (y_{1j} \varphi_{1j}(x) + y_{nj} \varphi_{nj}(x)) - \frac{1}{2} (y_{1r} \varphi_{1r}(x) + y_{n1} \varphi_{n1}(x)) \right) = B_s. \quad (2.72)$$

Далі використаємо стандартну процедуру проекційних методів, причому за проекційний базис візьмемо базисні функції, носіями яких є всі $n(r-2) - 2$ внутрішні вузли всіх скінченних елементів $D_2, D_3, \dots, D_{n-1}, 2r-2 - m$ базисні функції, носіями яких є внутрішні вузли скінченних елементів D_1 та D_n , а також $n-1$ базисна функція $(\varphi_{ir}(x) + \varphi_{i+1,1}(x))$ з носіями у вузлах, що одночасно належать сусіднім елементам. m базисних функцій, носіями яких є крайні точки скінченних елементів D_1 та D_n , у проекційний базис не включають, оскільки за їх допомогою вже визначено значення функції на кінцях відрізка (із граничних умов). При цьому враховують, що всі скалярні добутки базисних функцій на носіях, що не збігаються, дорівнюють нулю. У підсумку одержимо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} & \left(L \left(\sum_{j=1}^{r-1} y_{1j} \varphi_{1j}(x) + \frac{1}{2} y_{1r} \varphi_{1r}(x) \right), \varphi_{1s}(x) \right) - (f(x), \varphi_{1s}(x)) = 0, \quad s = \overline{\left[\frac{m}{2} \right] + 1, r-1}; \\ & \left(L \left(\sum_{j=2}^{r-1} y_{ij} \varphi_{ij}(x) + \frac{1}{2} (y_{i1} \varphi_{i1}(x) + y_{ir} \varphi_{ir}(x)) \right), \varphi_{is}(x) \right) - (f(x), \varphi_{is}(x)) = 0, \quad i = \overline{2, n-1}, s \neq 1, s \neq r; \\ & \left(L \left(\sum_{j=2}^r y_{nj} \varphi_{nj}(x) + \frac{1}{2} y_{n1} \varphi_{n1}(x) \right), \varphi_{ns}(x) \right) - (f(x), \varphi_{ns}(x)) = 0, \quad s = \overline{2, r - \left[\frac{m}{2} \right]}; \\ & \left(L \left(\sum_{j=2}^{r-1} y_{ij} \varphi_{ij}(x) + \frac{1}{2} (y_{i1} \varphi_{i1}(x) + y_{ir} \varphi_{ir}(x)) \right), \varphi_{ir}(x) \right) + \\ & + \left(L \left(\sum_{j=2}^{r-1} y_{i+1,j} \varphi_{i+1,j}(x) + \frac{1}{2} (y_{i+1,1} \varphi_{i+1,1}(x) + y_{i+1,r} \varphi_{i+1,r}(x)) \right), \varphi_{i+1,1}(x) \right) - \\ & - (f(x), \varphi_{ir}(x) + \varphi_{i+1,1}(x)) = 0, \quad i = \overline{2, n-1}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Таким чином, одержали систему $n(r-1) + 1$ нелінійних рівнянь щодо $n(r-1) + 1$ невідомих y_{ij} .

Якщо L – лінійний диференціальний оператор, то вирази (2.72) і (2.73) являють собою СЛАР щодо невідомих значень функції y_{ij} .

Приклад:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + y = x; \\ y(0) = 0; \\ y(1) = \frac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ly = f(x); \\ L = \frac{d^2}{dx^2} + 1; \\ f(x) = x. \end{cases}$$

Розіб'ємо відрізок $[0, 1]$ на два скінченні елементи – $D_1 : x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$D_2 : x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. У кожному скінченному елементі зафіксуємо по три вузли і

введемо по три базисні функції, які дорівнюють нулю поза скінченним елементом. Для задоволення умови (2.69) побудуємо базисні функції у вигляді інтерполяційних поліномів Лагранжа:

$$\varphi_{11}(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right);$$

$$\varphi_{21}(x) = \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = 12\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1);$$

$$\varphi_{12}(x) = \frac{x\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)} = -18x\left(x - \frac{1}{2}\right);$$

$$\varphi_{22}(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3} - 1\right)} = -18\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1);$$

$$\varphi_{13}(x) = \frac{x\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = 12x\left(x - \frac{1}{3}\right);$$

$$\varphi_{23}(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

Подамо невідому функцію, як лінійну комбінацію базисних функцій:

$$y(x) = y_{11}\varphi_{11}(x) + y_{12}\varphi_{12}(x) + \frac{1}{2}y_{13}(\varphi_{13}(x) + \varphi_{21}(x)) + y_{22}\varphi_{22}(x) + y_{23}\varphi_{23}(x).$$

Побудуємо проєкційну схему, причому за проєкційний базис використаємо базисні функції з носіями у всіх внутрішніх вузлах $\varphi_{12}(x)$ і $\varphi_{22}(x)$ і функцію $\varphi_{13}(x) + \varphi_{21}(x)$ з носієм у вузлі, що належить одночасно елементам D_1 і D_2 :

$$\begin{aligned} & y_{11} \underbrace{\int_0^{1/2} L\varphi_{11}(x)\varphi_{12}(x)dx}_{\frac{183}{40}} + y_{12} \underbrace{\int_0^{1/2} L\varphi_{12}(x)\varphi_{12}(x)dx}_{\frac{1053}{80}} + \frac{1}{2}y_{13} \underbrace{\int_0^{1/2} L\varphi_{13}(x)\varphi_{12}(x)dx}_{\frac{717}{80}} = \\ & = \underbrace{\int_0^{1/2} f(x)\varphi_{12}(x)dx}_{\frac{3}{32}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}y_{21} \underbrace{\int_{1/2}^1 L\varphi_{21}(x)\varphi_{22}(x)dx}_{\frac{717}{80}} + y_{22} \underbrace{\int_{1/2}^1 L\varphi_{22}(x)\varphi_{22}(x)dx}_{\frac{1053}{80}} + y_{23} \underbrace{\int_{1/2}^1 L\varphi_{23}(x)\varphi_{22}(x)dx}_{\frac{183}{40}} = \\ & = \underbrace{\int_{1/2}^1 f(x)\varphi_{22}(x)dx}_{\frac{9}{32}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_{11} \underbrace{\int_0^{1/2} L\varphi_{11}(x)\varphi_{13}(x)dx}_{\frac{7}{240}} + y_{12} \underbrace{\int_0^{1/2} L\varphi_{12}(x)\varphi_{13}(x)dx}_{\frac{3}{80}} + \frac{1}{2}y_{13} \times \\
& \times \left[\underbrace{\int_0^{1/2} L\varphi_{13}(x)\varphi_{12}(x)dx}_{\frac{1}{30}} + \underbrace{\int_{1/2}^1 L\varphi_{21}(x)\varphi_{21}(x)dx}_{\frac{1}{30}} \right] + \\
& + y_{22} \underbrace{\int_{1/2}^1 L\varphi_{22}(x)\varphi_{21}(x)dx}_{\frac{3}{80}} + y_{23} \underbrace{\int_{1/2}^1 L\varphi_{23}(x)\varphi_{21}(x)dx}_{\frac{7}{240}} = \underbrace{\int_0^{1/2} f(x)\varphi_{13}(x)dx}_{\frac{1}{48}} + \underbrace{\int_{1/2}^1 f(x)\varphi_{21}(x)dx}_{\frac{1}{48}}.
\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\varphi_{12}(0) = \varphi_{13}(0) = 0; \varphi_{2i}(0) = 0, i = \overline{1,3}; \varphi_{21}(1) = \varphi_{22}(1) = 0; \varphi_{1i}(1) = 0, i = \overline{1,3},$$

із крайових умов маємо:

$$y_{11} = 0, y_{23} = 1/3.$$

Одержуємо СЛАР:

$$\begin{aligned}
-\frac{1053}{80}y_{12} + \frac{717}{160}y_{13} &= \frac{3}{32}, \quad \frac{717}{160}y_{13} - \frac{1053}{80}y_{22} = -\frac{199}{160}, \\
-\frac{3}{80}y_{12} + \frac{1}{30}y_{13} - \frac{3}{80}y_{22} &= \frac{7}{720}.
\end{aligned}$$

Розв'язуючи систему, одержуємо:

$$\begin{aligned}
y_{12} &= 0,0745, & y(1/3) &= 0,0741, \\
y_{13} = y_{21} &= 0,1209, & y(1/2) &= 0,1202, \\
y_{22} &= 0,1784, & y(2/3) &= 0,1768.
\end{aligned}$$

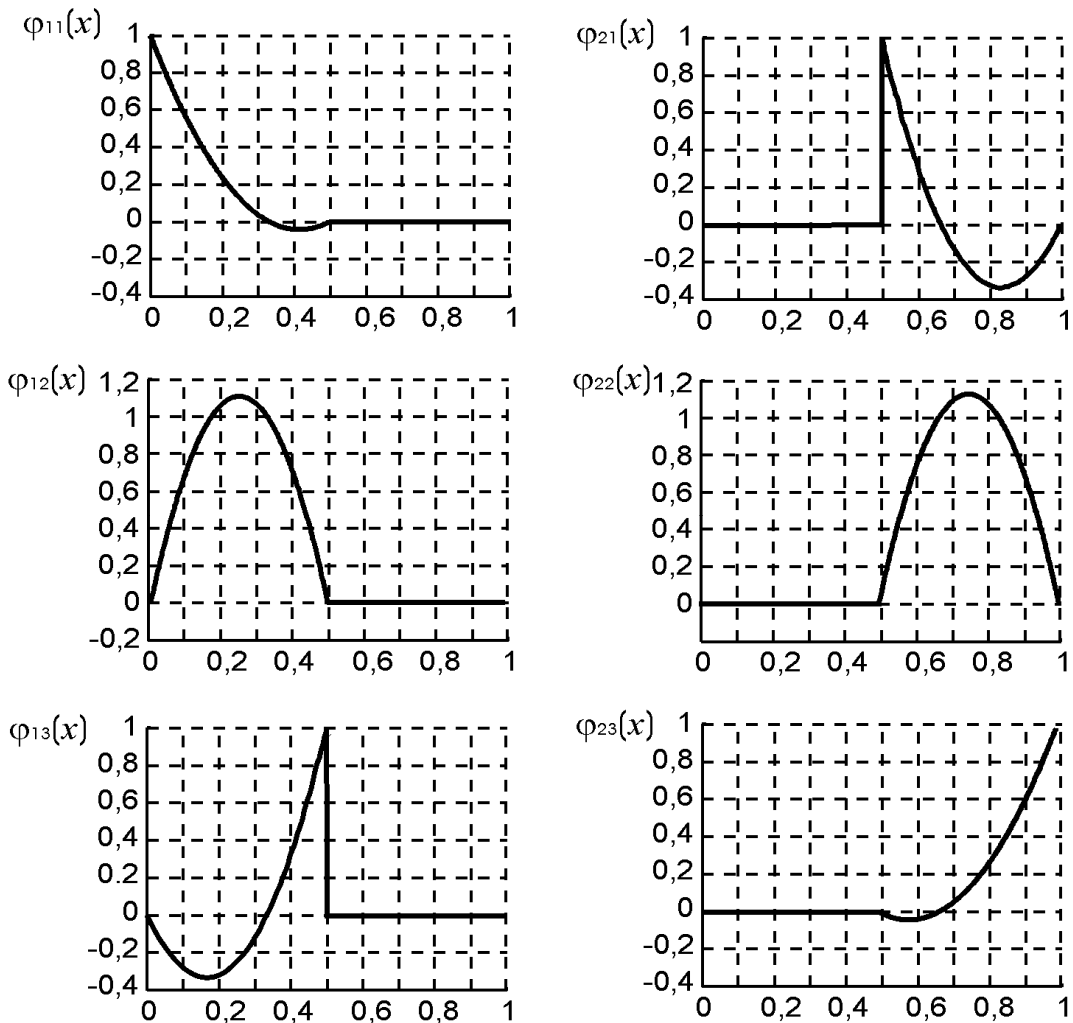


Рис. 2.2. Базис фінітних функцій

Контрольні завдання

1. Вибрати задачі Коші відповідно до свого варіанта.
2. Розв'язати одновимірну задачу Коші методом Ейлера. Оцінити абсолютну та відносну похибку розв'язку.
3. Розв'язати одновимірну задачу Коші методом Рунге – Кутта 4-го порядку. Оцінити абсолютну та відносну похибку розв'язку.
4. Розв'язати одновимірну задачу Коші явним методом Адамса 4-го порядку. Оцінити абсолютну та відносну похибку розв'язку.
5. Розв'язати одновимірну задачу Коші методом Гіра 4-го порядку. Оцінити абсолютну та відносну похибку розв'язку.
6. Порівняти результати пп. 2 – 5.
7. Розв'язати систему ЗДР методом Ейлера. Оцінити похибку розв'язку.

Варіанти завдань

1. $\frac{dy}{dt} = t^2 - 3y;$
 $y(0) = 1, t \in [0; 1].$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{2}, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \end{cases}$$
 $x(0) = 1, y(0) = 1, t \in [0; 1].$
2. $\frac{dy}{dt} = y(1-t);$
 $y(0) = 1, t \in [0; 1].$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = xy, \end{cases}$$
 $x(0) = 1, y(0) = 1, t \in [0; 1].$
3. $\frac{dy}{dt} = ty - t;$
 $y(0) = 0, t \in [0; 1].$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin(t) - y, \\ \frac{dy}{dt} = \cos(t) - x, \end{cases}$$
 $x(0) = 0, y(0) = 1, t \in [0; 1].$
4. $\frac{dy}{dt} = 4t^2 - y;$
 $y(0) = 0, t \in [0; 1].$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$$
 $x(0) = 1, y(0) = 0, t \in [0; 1].$
5. $\frac{dy}{dt} = \cos(t + y);$
 $y(0) = 0, t \in [0; 1].$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -t, \end{cases}$$
 $x(0) = 0, y(0) = 1, t \in [0; 1].$
6. $\frac{dy}{dt} = \sin(t - y);$
 $y(0) = 1, t \in [0; 1].$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x, \\ \frac{dy}{dt} = t, \end{cases}$$
 $x(0) = 1, y(0) = 0, t \in [0; 1].$

7. $\frac{dy}{dt} = -\sin(t + y - 1);$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = t, \end{cases}$
 $y(0) = 0, t \in [0; 1].$ $x(0) = 1, y(0) = 0, t \in [0; 1].$
8. $\frac{dy}{dt} = \cos(2t) + y;$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x, \\ \frac{dy}{dt} = -t^2, \end{cases}$
 $y(0) = -\frac{1}{2}, t \in [0; 1].$ $x(0) = 0, y(0) = 1, t \in [0; 1].$
9. $\frac{dy}{dt} = \sin(t - 1) + y,$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2t, \end{cases}$
 $y(0) = \frac{1}{2}, t \in [0; 1].$ $x(0) = 0, y(0) = \frac{1}{2}, t \in [0; 1].$
10. $\frac{dy}{dt} = \sin(t) - y;$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - t^2, \end{cases}$
 $y(0) = 0, t \in [0; 1].$ $x(0) = \frac{1}{7}, y(0) = -1, t \in [0; 1].$
11. $\frac{dy}{dt} = \cos(t) - y;$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - t, \end{cases}$
 $y(0) = 0, t \in [0; 1].$ $x(0) = 0, y(0) = 1, t \in [0; 1].$
12. $\frac{dy}{dt} = (1 - 2y)\sqrt{1 + t};$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \sin(t), \\ \frac{dy}{dt} = x + t, \end{cases}$
 $y(0) = 0, t \in [0; 1].$ $x(0) = -1, y(0) = 0, t \in [0; 1].$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{13.} \quad \frac{dy}{dt} = t\sqrt{y}; \\
 y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y + \cos(t), \\ \frac{dy}{dt} = x + t, \end{array} \right. \\
 x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{14.} \quad \frac{dy}{dt} = ty; \\
 y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + t, \end{array} \right. \\
 x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{15.} \quad \frac{dy}{dt} = -y^2; \\
 y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - \cos(t), \\ \frac{dy}{dt} = x + t, \end{array} \right. \\
 x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{16.} \quad \frac{dy}{dt} = -ty^2; \\
 y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - \cos(t), \\ \frac{dy}{dt} = t - x, \end{array} \right. \\
 x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{17.} \quad \frac{dy}{dt} = t^2 y; \\
 y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - \sin(t), \\ \frac{dy}{dt} = t - x, \end{array} \right. \\
 x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{18.} \quad \frac{dy}{dt} = e^t + y; \\
 y(0) = 0, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - e^t, \\ \frac{dy}{dt} = t - x, \end{array} \right. \\
 x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{19.} \quad \frac{dy}{dt} = e^t - y; \\
 y(0) = 0, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = t - x, \end{array} \right.$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = -1, \quad t \in [0; 1].$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{20.} \quad y' = -\sqrt{t}y^2; \\
 y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = t + x, \end{array} \right.$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0; 1].$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{21.} \quad \frac{dy}{dt} = t^2 \sqrt{y}; \\
 y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + t, \end{array} \right.$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0; 1].$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{22.} \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{t}y; \\
 y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - 2y - t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + t, \end{array} \right.$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{23.} \quad \frac{dy}{dt} = -t^2 y^2; \\
 y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x + y - t, \\ \frac{dy}{dt} = y - x + t, \end{array} \right.$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{24.} \quad \frac{dy}{dt} = y \sin(t); \\
 y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2y - t, \\ \frac{dy}{dt} = t - x, \end{array} \right.$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0; 1].$$

25. $\frac{dy}{dt} = y \cos(t);$
 $y(0) = 1, t \in [0; 1].$
- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \cos^2(t), \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$
- $$x(0) = -1, y(0) = 0, t \in [0; 1].$$
26. $\frac{dy}{dt} = -y^2 \cos(t);$
 $y(0) = 1, t \in [0; 1].$
- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \sin^2(t), \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$
- $$x(0) = -1, y(0) = 1, t \in [0; 1].$$
27. $\frac{dy}{dt} = -y^2 \sin(t);$
 $y(0) = 1, t \in [0; 1].$
- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$
- $$x(0) = -1, y(0) = -1, t \in [0; 1].$$
28. $\frac{dy}{dt} = y \sin^2(t);$
 $y(0) = 1, t \in [0; 1].$
- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + e^{(t/2)}, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \end{cases}$$
- $$x(0) = 1, y(0) = 1, t \in [0; 1].$$
29. $\frac{dy}{dt} = y \cos^2(t);$
 $y(0) = 1, t \in [0; 1].$
- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \sin(2t), \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$
- $$x(0) = 1, y(0) = -1, t \in [0; 1].$$
30. $\frac{dy}{dt} = -yt^3;$
 $y(0) = 1, t \in [0; 1].$
- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \cos(2t), \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$
- $$x(0) = 0, y(0) = 0, t \in [0; 1].$$

3. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

3.1. Основні визначення та приклади диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Рівняння Власова. Кінетичне рівняння Больцмана. Рівняння неперервності.

В самому загальному випадку диференціальне рівняння з частинними похідними (ДРЧП) першого порядку має вигляд:

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0, \quad (3.1)$$

де F — деяка відома функція своїх аргументів, u — функція n аргументів: x_1, x_2, \dots, x_n , що підлягає визначенню.

Частковими випадками диференціального рівняння (3.1) є лінійне рівняння

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2)$$

та квазілінійне рівняння

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \quad (3.3)$$

де a_i, a — задані функції своїх аргументів, які диференціюються.

Розглянемо декілька прикладів диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними.

Приклад 3.1.

Для опису поведінки великого ансамблю частинок, наприклад електронного газу в твердому тілі, використовують статистичні методи. Статистичний розгляд пов'язано з введенням функції розподілу $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, яка має сенс щільності ймовірності того, що довільна частка в момент часу t і в точці простору, яка характеризується радіус вектором \mathbf{r} має швидкість \mathbf{v} .

Для системи однотипних частинок, які розташовані настільки рідко, що практично не зіштовхуються одна з одною, визначальною властивістю функції розподілу f є її сталість уздовж траєкторії руху довільної частинки, тобто вона є інтегралом руху:

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (3.4)$$

Якщо розглядати f як функцію часу, координат і швидкостей (тобто в так званому фазовому просторі), то рівняння (3.4) набуває такого вигляду:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0,$$

або

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \frac{\mathbf{F}}{m} = 0, \quad (3.5)$$

де \mathbf{F} — сила, що діє на частинку, m — маса частинки.

Рівняння (3.5) називають рівнянням Власова.

Якщо знехтувати зіткненнями частинок не можна, то

$$\frac{df}{dt} = S(f),$$

де $S(f)$ — інтеграл зіткнень. Тому рівняння (3.5) необхідно замінити рівнянням:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = S(f),$$

яке називають кінетичним рівнянням Больцмана.

Часто кінетичне рівняння Больцмана розв'язують в наближенні часу релаксації. У цьому випадку приймають, що інтеграл зіткнень дорівнює:

$$S(f) = \frac{f - f_0}{\tau},$$

де f_0 — функція розподілу у рівновазі, τ — час релаксації, що залежить від механізмів розсіювання. Тоді кінетичне рівняння Больцмана набуде вигляду:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{f - f_0}{\tau}.$$

Приклад 3.2.

Розглянемо середовище, в якому протікає струм, і виділимо в ній замкнену поверхню S (рис.3.1). Для струму i , що виходить в одиницю часу з об'єму V , який обмежено поверхнею S , маємо

$$i = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s},$$

де \mathbf{j} — вектор щільності струму, $d\mathbf{s} = ds \cdot \mathbf{n}$, ds — площа елементарної поверхні, \mathbf{n} — вектор нормалі до поверхні, направлений назовні.

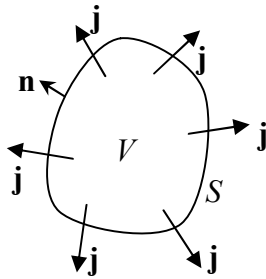


Рис.3.1. Струм, що тече через замкнену поверхню S , яка обмежує об'єм V .

В силу закону збереження заряду ця величина повинна дорівнювати швидкості убавання заряду q , що міститься в даному об'ємі:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dq}{dt}.$$

Це співвідношення називають рівнянням неперервності в інтегральній формі. З огляду на те, що заряд у об'ємі може бути знайдено як

$$q = \int_V \rho dv,$$

де ρ — об'ємна щільність заряду, отримаємо:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dv.$$

Перетворивши ліву частину рівності за теоремою Остроградського-Гаусса, знаходимо:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dv = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dv.$$

Таким чином в кожній точці простору виконується умова

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{d\rho}{dt},$$

яке є диференціальною формою рівняння неперервності, а з математичної точки зору є диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку.

3.2. Лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку

Розглянемо спочатку двовимірний випадок ($n = 2$) рівняння (3.1):

$$a_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0. \quad (3.6)$$

Вираз зліва можна інтерпретувати як скалярний добуток векторного поля $[a_1, a_2]^T$ на $\text{grad} u = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right]^T$, і, таким чином, (3.6) означає, що похідна від u по напрямку $[a_1, a_2]^T$ дорівнює нулю, тобто функція u вздовж цього напрямку не змінюється. Будемо шукати криву на площині (x_1, x_2) , яка має таку властивість, що дотичний вектор до цієї кривої є колінеарним до вектора $[a_1, a_2]^T$. Ця умова вимагає, щоб тангенс кута нахилу дотичної до кривої дорівнює тангенсу кута нахилу вектора $[a_1, a_2]^T$. Отже

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_1(x_1, x_2)}{a_2(x_1, x_2)}. \quad (3.7)$$

Інтегральну криву, яка є розв'язком рівняння (3.7) називають характеристикою диференціального рівняння з частинними похідними (3.6). Рівняння (3.7) часто записують у вигляді:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2)}. \quad (3.8)$$

Характеристику можна подати у параметричному вигляді (параметром є s). Тоді параметричним представленням характеристики є система рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{ds} &= a_1(x_1(s), x_2(s)), \\ \frac{dx_2}{ds} &= a_2(x_1(s), x_2(s)).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Підставляючи (3.9) у (3.6), отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} = 0,$$

або

$$\frac{du}{ds} = 0.\tag{3.10}$$

Таким чином, розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними (3.6) зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь (3.9), (3.10). Однак, розв'язок диференціального рівняння (3.6) можна отримати не вдаючись до безпосереднього розв'язання системи (3.9), (3.10).

Дійсно з рівняння (3.10) випливає, що

$$u(s) = \text{const}.\tag{3.11}$$

Оскільки кожне значення параметра визначає точку на характеристиці, то, як випливає з (3.11) характеристики є лініями рівня поверхні $u(x_1, x_2)$. Отже, якщо якимось чином вдалося знайти функцію $\varphi(x_1, x_2)$, яка має таку властивість, що вона залишається сталою уздовж розв'язку системи (3.9), чи рівняння (3.8), тобто вздовж характеристики, то загальний розв'язок рівняння (3.6) можна записати у вигляді:

$$u(x_1, x_2) = f(\varphi(x_1, x_2)),\tag{3.12}$$

де f — довільна функція.

Будемо називати першим інтегралом рівняння (3.8), таку функцію $\varphi(x_1, x_2)$, що тотожно дорівнює сталій, якщо точки (x_1, x_2) знаходяться на характеристиці. Тоді розв'язання рівняння (3.6) зводиться до знаходження першого інтеграла рівняння (3.8). Якщо перший інтеграл $\varphi(x_1, x_2)$ знайдено, то загальний розв'язок рівняння (3.6) знаходять із (3.12).

Приклад 3.3.

Нехай $a_1(x_1, x_2) = x_1$, і $a_2(x_1, x_2) = x_2$. Тоді рівняння (3.6) матиме вигляд:

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Запишемо рівняння для характеристики:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримаємо:

$$\ln|x_1| = \ln|x_2| + c,$$

де c — стала. З останнього рівняння отримуємо

$$\ln \left| \frac{x_1}{x_2} \right| = c,$$

або

$$\frac{x_1}{x_2} = \text{const}.$$

Отже, першим інтегралом рівняння для характеристик буде функція $\varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$. Тому загальним розв'язком розглянутого диференціального рівняння з частинними похідними буде

$$u(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right),$$

де f — довільна функція.

Дійсно, $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2} f'$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2} f'$, де f' — похідна від функції f .

Підставляючи ці похідні у вихідне диференціальне рівняння, переконуємося, що воно перетворюється в тотожність.

Приклад 3.4.

Замінімо аргументи x_1 і x_2 на x і t , які мають чітку фізичну інтерпретацію: координату розташування матеріальної точки і час. Нехай $a_1(x, t) = 1$ і $a_2(x, t) = \frac{1}{v}$, де v — стала швидкість матеріальної точки. Тоді рівняння (3.6) набуде вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Характеристики цього диференціального рівняння з частинними похідними можуть бути знайденими з рівняння:

$$dx = v dt.$$

Звідки

$$x - vt = \text{const}.$$

Тоді першим інтегралом рівняння для характеристик є функція:

$$\varphi(x, t) = x - vt.$$

Отже, загальним розв'язком розглянутого диференціального рівняння з частинними похідними є:

$$u(x, t) = f(x - vt),$$

де f — довільна функція. Легко переконатися, що такий розв'язок перетворює диференціальне рівняння з частинними похідними у тотожність.

Функцію $f(x - vt)$ називають хвилею, що біжить зі швидкістю v і профілем $f(\xi)$. Зобразимо профілі хвилі в моменти часу t_1 і t_2 (рис. 3.2).

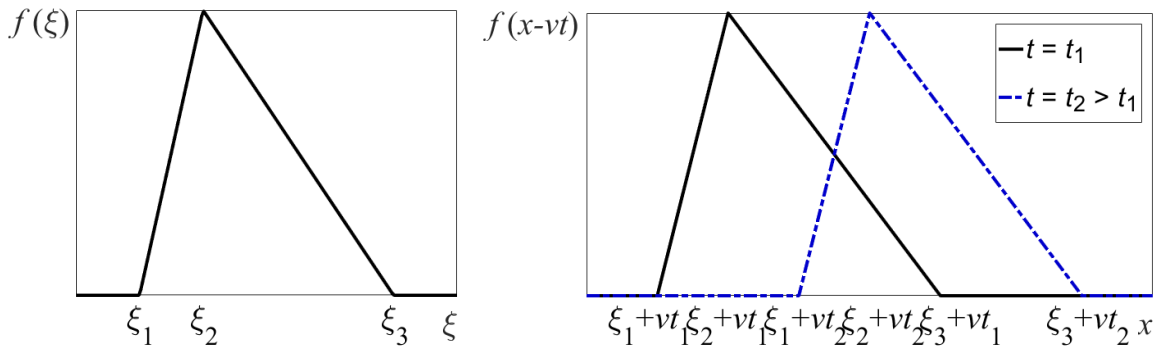


Рис. 3.2. Хвиля, що біжить, з профілем трикутної форми

Згідно (3.12) загальний розв'язок рівняння з частинними похідними залежить від довільної функції, тобто містить ще більшу ступінь сваволі, ніж у разі звичайного диференціального рівняння. Розглянемо питання про те, яким чином з безлічі (3.12) можна виділити єдиний розв'язок.

Нехай на кривій γ , рівняння якої $x_1 = x_1(\xi)$, $x_2 = x_2(\xi)$, задано додаткову умову:

$$u(x_1, x_2)|_{\gamma} = \mu(\xi), \quad (3.13)$$

де $\mu(\xi)$ — задана функція від аргументу ξ . Таку задачу називають початковою задачею або задачею Коші для рівняння (3.6).

Для того, щоб існував єдиний розв'язок задачі Коші (3.6), (3.13) крива γ не повинна співпадати ні з одною характеристикою. Дійсно, припустимо, що крива γ збігається з характеристикою. Тоді, якщо $\mu(\xi) \neq const$, то розв'язок задачі (3.6), (3.13) не існує, оскільки будь-який розв'язок рівняння (3.6) є сталим уздовж характеристики і умову (3.13) не можливо задовольнити. Тепер припустимо, що $\mu(\xi) = const = \mu_0$. Тоді розв'язок визначається неоднозначно, оскільки його може бути подано у вигляді:

$$u(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2)|_{\gamma} + \mu_0$$

де $\psi(x_1, x_2)$ — будь-який розв'язок задачі (3.6).

Припустимо, що крива γ не співпадає з характеристикою ні на одному скінченному інтервалі. Тоді значення першого інтеграла рівняння (3.8) змінюється уздовж кривої γ , тобто $\varphi(x_1, x_2)|_{\gamma} = \varphi(x_1(\xi), x_2(\xi)) = \theta(\xi)$ є функцією від ξ . Отже можна знайти обернену функцію $\xi = \psi(\varphi(x_1, x_2)|_{\gamma})$. Тоді $\mu(\xi) = \mu(\psi(\varphi(x_1, x_2)|_{\gamma}))$ і розв'язком задачі (3.6), (3.13) є функція:

$$u(x_1, x_2) = \mu(\psi(\varphi(x_1, x_2)|_{\gamma})). \quad (3.14)$$

Приклад 3.5.

Розглянемо диференціальне рівняння з прикладу 3.4 і, як (3.13), візьмемо умову

$$u(0, t) = \mu(t).$$

Тут γ є прямою $x = 0$, параметром $\xi \in t$. У цьому випадку $\varphi(x, t) = x - vt$, $\varphi(0, t)|_\gamma = -vt$. Звідки знаходимо $t = \psi\left(\varphi(x, t)|_\gamma\right) = -\frac{\varphi(x, t)|_\gamma}{v}$. Отже розв'язком задачі Коші є функція:

$$u(x, t) = \mu\left(-\frac{\varphi(x, t)}{v}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Таким чином, розв'язком є хвиля, що біжить, профіль якої однозначно визначається заданою функцією $\mu(t)$.

Узагальнимо одержані результати на n -вимірний випадок. Лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними (3.2) може бути зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= a_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = \overline{1, n}, \\ \frac{du}{ds} &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Характеристики рівняння (3.2) можуть бути знайдені з системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (3.16)$$

Нехай знайдено $n-1$ перших інтегралів системи (3.16) $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = \overline{1, n-1}$. Тоді загальний розв'язок рівняння (3.2) можна подати у вигляді

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right), \quad (3.17)$$

де f — довільна функція.

Під час формування задачі Коші для рівняння (3.2) задають додаткові умови на n -вимірній кривій γ , яка не співпадає з характеристиками:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n)|_{\gamma} = \mu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}), \quad (3.18)$$

де μ — задана функція від параметрів $\xi_i, i = \overline{1, n-1}$. Нехай знайдено $n-1$ функцію ψ_i , що зв'язують перші інтеграли системи (3.16) на кривій γ з параметрами ξ_i таким чином, що

$$\psi_i\left(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)|_{\gamma}, \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)|_{\gamma}, \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)|_{\gamma}\right) = \xi_i, i = \overline{1, n-1}.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (3.2), (3.18) має наступний вигляд:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu \left(\begin{array}{l} \psi_1(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)), \\ \psi_2(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)), \\ \dots \\ \psi_{n-1}(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)) \end{array} \right). \quad (3.19)$$

3.3. Квазілінійне диференціальне рівняння першого порядку з частинними похідними

Для розв'язання рівняння (3.3) уведемо функцію:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0, \quad (3.20)$$

яка неявним чином визначає функцію $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Знайдемо повну похідну функції $v(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ за аргументом x_i :

$$\frac{dv}{dx_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (3.21)$$

Враховуючи (3.20) похідна (3.21) дорівнює нулю. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\frac{\partial v}{\partial u}}. \quad (3.22)$$

Підставляючи (3.22) у (3.3) і припускаючи, що $\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0$, отримуємо:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial v}{\partial x_i} + a(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial v}{\partial u} = 0. \quad (3.23)$$

Отже, розв'язок квазілінійного рівняння (3.3) співпадає з розв'язком лінійного рівняння (3.23) відносно функції $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яку неявно задано рівнянням (3.20). Для знаходження функції $v(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ необхідно знайти характеристики із системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)} = \frac{du}{a(x_1, x_2, \dots, x_n, u)} \quad (3.24)$$

Нехай знайдено n перших інтегралів системи (3.24) $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u), i = \overline{1, n}$. Тоді загальний розв'язок рівняння можна записати у вигляді

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = \phi(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u))$$

Враховуючи (3.20), отримуємо

$$\phi(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)) = 0, \quad (3.25)$$

де ϕ — довільна функція.

Рівняння (3.25) неявним чином визначає розв'язок рівняння (3.3) $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Щоб визначити задачу Коші може використовуватися умова (3.18). Оскільки нумерацію перших інтегралів системи (3.24) обрано довільно, то припустимо, що з останнього $\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)|_\gamma$ на кривій γ явним або неявним чином може бути знайдено функцію u :

$$u = \psi_n \left(\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)|_\gamma \right).$$

Нехай також знайдено $n-1$ функцію ψ_i , які пов'язують перші інтеграли системи (3.24) на кривій γ з параметрами ξ_i таким чином, що

$$\psi_i \left(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)|_\gamma, \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u)|_\gamma, \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u)|_\gamma \right) = \xi_i, i = \overline{1, n-1}.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (3.3), (3.18) може бути знайдено з рівняння:

$$\begin{aligned} & \psi_n \left(\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \right) - \\ & - \mu \left(\begin{array}{l} \psi_1 \left(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \right), \\ \psi_2 \left(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \right), \\ \dots \\ \psi_{n-1} \left(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \right) \end{array} \right) = (3.26) \\ & = 0 \end{aligned}$$

Приклад 3.6.

Оскільки лінійне рівняння є окремим випадком квазілінійного у випадку, якщо $a(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$ та коли всі a_i не є функціями від u , то розв'яжемо рівняння з прикладу 3.4 «квазілінійним» способом.

Запишемо рівняння для характеристик:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{du}{0}.$$

Першими інтегралами цієї системи будуть дві функції: $\varphi_1 = \frac{x_1}{x_2}$, $\varphi_2 = u$. Тоді

відповідно до (3.25) маємо:

$$\phi\left(\frac{x_1}{x_2}, u\right) = 0,$$

де ϕ — довільна функція.

Останнє рівняння визначає функцію, задану неявним способом:

$$u(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right),$$

де f — довільна функція.

Приклад 3.7.

Розв'яжемо задачу Коші:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u = 0,$$

$$u(0, t) = \mu(t),$$

де α , v — сталі, $\mu(t)$ — задана функція.

Запишемо рівняння для характеристик:

$$\frac{dx}{1} = v dt = -\frac{du}{\alpha u}.$$

Першими інтегралами цієї системи диференціальних рівнянь будуть дві функції: $\varphi_1(x, t, u) = x - vt$, $\varphi_2(x, t, u) = ue^{\alpha x}$. Тоді відповідно до (3.25) маємо

$$\phi(x - vt, ue^{\alpha x}) = 0,$$

де ϕ — довільна функція.

Останнє рівняння визначає функцію, задану неявним способом:

$$ue^{\alpha x} = f(x - vt).$$

Звідки

$$u(x, t) = e^{-\alpha x} f(x - vt).$$

Таким чином, загальний розв'язок даного диференціального рівняння визначає загасаючий хвильовий процес.

Знайдемо розв'язок задачі Коші. У ній $\gamma \in$ прямою $x = 0$, параметром $\xi \in t$.

В цьому випадку $\varphi_1(x, t, u)|_{\gamma} = \varphi_1(0, t, u) = -vt$, $\varphi_2(x, t, u)|_{\gamma} = \varphi_2(0, t, u) = u$. Звідки

знаходимо $t = \psi_1(\varphi_1(x, t, u)|_{\gamma}) = -\frac{\varphi_1(x, t, u)|_{\gamma}}{v}$, $u = \varphi_2(x, t, u)|_{\gamma}$. Отже, відповідно до

(3.26) розв'язок може бути знайдено з рівняння:

$$\varphi_2(x, t, u) = \mu\left(-\frac{\varphi_1(x, t, u)}{v}\right),$$

або

$$ue^{\alpha x} = \mu\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Таким чином розв'язком задачі Коші буде функція:

$$u(x, t) = e^{-\alpha x} \mu\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

3.4. Нелінійне диференціальне рівняння першого порядку з частинними похідними

Розглянемо диференціальне рівняння (3.1). Позначимо:

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (3.27)$$

Тоді рівняння (3.1) переписеться у вигляді:

$$F(p_1, p_2, \dots, p_n, u, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (3.28)$$

Будемо шукати розв'язок у параметричному вигляді:

$$u(s) = u(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)). \quad (3.29)$$

Тоді з (3.28) випливає:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{ds} + \frac{\partial F}{\partial u} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{ds} + \left(p_i \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i}{ds} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Рівняння (3.30) перетворюється в тотожність, якщо покласти

$$\frac{dx_i}{ds} = \lambda \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad (3.31)$$

$$\frac{dp_i}{ds} = -\lambda \left(p_i \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \right), \quad (3.32)$$

де λ — стала.

Запишемо вираз для похідної від функції u по параметру s :

$$\frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds}. \quad (3.33)$$

Враховуючи (3.27) та (3.31), із (3.33) випливає:

$$\frac{du}{ds} = \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}. \quad (3.34)$$

Рівняння (3.31), (3.32) та (3.34) утворюють систему диференціальних рівнянь щодо характеристик. Їх можна переписати наступним чином:

$$\frac{dx_j}{\frac{\partial F}{\partial p_j}} = - \frac{dp_j}{p_j \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x_j}} = \frac{du}{\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}}, j = \overline{1, n}. \quad (3.35)$$

Приклад 3.8.

Розглянемо нелінійне рівняння:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 = 1.$$

Подемо його у формі (3.28):

$$F = p_1^2 + p_2^2 - 1.$$

Запишемо систему характеристичних рівнянь (3.35) для нелінійного диференціального рівняння, що розглядається:

$$\frac{dx_1}{2p_1} = \frac{dx_2}{2p_2} = \frac{dp_1}{0} = \frac{dp_2}{0} = \frac{du}{2(p_1^2 + p_2^2)}.$$

Враховуючи, що $p_1^2 + p_2^2 = 1$ систему характеристичних диференціальних рівнянь можна переписати у вигляді:

$$\frac{dx_1}{p_1} = \frac{dx_2}{p_2} = \frac{dp_1}{0} = \frac{dp_2}{0} = \frac{du}{1}.$$

З цієї системи рівнянь випливає, що функції p_1 і p_2 не залежать від параметра s . Тоді з решти двох рівнянь маємо:

$$\frac{x_2 + c_1}{x_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\pm\sqrt{1-p_1^2}}{p_1} = \pm\sqrt{\frac{1}{p_1^2}-1},$$

$$u = \frac{x_1}{p_1} + c_2,$$

де c_1, c_2 — сталі.

З першого рівняння маємо:

$$p_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_2 + c_1}{x_1}\right)^2 + 1}}.$$

Підставляючи цей вираз у друге рівняння, отримаємо:

$$u(x_1, x_2) = \pm x_1 \sqrt{\left(\frac{x_2 + c_1}{x_1}\right)^2 + 1} + c_2 = \pm \sqrt{x_1^2 + (x_2 + c_1)^2} + c_2.$$

Перевіримо чи задовольняє отримане рішення вихідного диференціального рівняння. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \pm \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + (x_2 + c_1)^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \pm \frac{x_2 + c_1}{\sqrt{x_1^2 + (x_2 + c_1)^2}}.$$

Тоді

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = \frac{x_1^2 + (x_2 + c_1)^2}{x_1^2 + (x_2 + c_1)^2} = 1.$$

Отримали тотожність. Отже розв'язок є вірним.

Контрольні завдання

1. Для рівняння (3.6) задати функції $a_1(x_1, x_2)$ та $a_2(x_1, x_2)$. Узгодити ці функції з викладачем. Знайти загальний розв'язок рівняння (3.6).

2. Сформулювати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку з частинними похідними (3.6) та (3.13). Узгодити цю задачу з викладачем. Розв'язати задачу Коші та побудувати розв'язок графічно.

3. Задати квазілінійне диференціальне рівняння першого порядку з частинними похідними. Узгодити це рівняння з викладачем. Знайти загальний розв'язок цього рівняння.

4. Сформулювати задачу Коші для квазілінійного диференціального рівняння першого порядку з частинними похідними. Узгодити цю задачу з викладачем. Розв'язати задачу Коші.

5. Задати нелінійне диференціальне рівняння першого порядку з частинними похідними. Узгодити це рівняння з викладачем. Знайти загальний розв'язок цього рівняння.

Варіанти завдань

- | | |
|-----|-----|
| 1. | 2. |
| 3. | 4. |
| 5. | 6. |
| 7. | 8. |
| 9. | 10. |
| 11. | 12. |
| 13. | 14. |
| 15. | 16. |

17.

19.

21.

23.

25.

27.

29.

18.

20.

22.

24.

26.

28.

30.

4. Диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку

4.1. Класифікація квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.

Гіперболічні, параболічні та еліптичні рівняння.

Приведення рівнянь до канонічної форми.

Квазілінійне (лінійне щодо старших похідних) диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно функції n змінних має вигляд:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x_1, x_2, \dots, x_n\right), \quad (4.1)$$

де $a_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$, F — відомі функції, u — функція аргументів x_1, x_2, \dots, x_n , що підлягає знаходженню.

Для спрощення аналізу розглянемо рівняння (4.1) відносно функції двох змінних:

$$a_{11}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, u, x_1, x_2\right) = 0. \quad (4.2)$$

З метою спрощення рівняння (4.2) уведемо нові змінні:

$$\xi = \xi(x_1, x_2), \eta = \eta(x_1, x_2). \quad (4.3)$$

Перетворюючи похідні до нових змінних, отримуємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Підставляючи вирази (4.4) у рівняння (4.2) отримуємо:

$$\tilde{a}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\tilde{a}_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{a}_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{F} = 0, \tag{4.5}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right)^2, \\
\tilde{a}_{12} &= a_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + a_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) + a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2}, \\
\tilde{a}_{22} &= a_{11} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + a_{22} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^2,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

а функція \tilde{F} не залежить від похідних другого порядку.

Будемо шукати такі функції (4.3) щоб $\tilde{a}_{11} = 0$. Тоді з першого виразу (4.6)

маємо:

$$a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right)^2 = 0. \tag{4.7}$$

Вважаючи, що $\frac{\partial \xi}{\partial x_2} \neq 0$, розділивши рівняння (4.7) на $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2}\right)^2$ і враховуючи,

що $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial \xi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \xi}{\partial x_2}}$ з рівняння (4.7) отримуємо:

$$a_{11}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dx_2}{dx_1} + a_{22} = 0. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) можна переписати у формі:

$$a_{11}dx_2^2 - 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}dx_1^2 = 0. \quad (4.9)$$

Рівняння (4.9) називають характеристичним, а його розв'язок характеристиками рівняння (4.2). Оскільки рівняння (4.9) виходить із третього рівняння (4.6), то характеристики описують обидві функції (4.3).

Характеристичне рівняння розпадається на два:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (4.10)$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (4.11)$$

Вираз під коренем у рівняннях (4.10) та (4.11) визначає тип рівняння (4.2). В залежності від значення та знаку виразу під коренем можливі три випадки:

1. Припустимо, що

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0. \quad (4.12)$$

В цьому випадку (4.2) називають рівнянням гіперболічного типу. В силу того, що праві частини рівнянь (4.10) і (4.11) є дійсними та різними, то перші інтеграли цих рівнянь $\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)$ можна вибрати як функції (4.3):

$$\xi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2), \quad \eta(x_1, x_2) = \varphi_2(x_1, x_2).$$

Тоді \tilde{a}_{11} і \tilde{a}_{22} у рівнянні (4.5) дорівнюють нулю, то це рівняння можна привести до вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta \right), \quad (4.13)$$

де $\Phi = -\frac{\tilde{F}}{2\tilde{a}_{12}}$.

Рівняння (4.13) є однією з канонічних форм гіперболічного рівняння. Часто використовують іншу канонічну форму гіперболічного рівняння. Прийmemo:

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$

тобто

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

де α, β — нові змінні. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right).$$

У результаті рівняння (4.13) набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, u, \alpha, \beta \right), \quad (4.14)$$

де Φ_1 — функція своїх аргументів.

Приклад 4.1

Привести до канонічної форми рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1 x_2. \quad (4.15)$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)^2 + \frac{dx_2}{dx_1} - 6 = 0.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}.$$

Оскільки характеристичне рівняння має два різних дійсних кореня, то вихідне ДРЧП відноситься до гіперболічного типу. Знайдемо перші інтеграли характеристичного рівняння. З рівняння

$$\frac{dx_2}{dx_1} = 2$$

маємо:

$$\varphi_1(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2.$$

Аналогічно

$$\varphi_2(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2.$$

Уведемо нові змінні:

$$\xi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2, \quad (4.16)$$

$$\eta(x_1, x_2) = \varphi_2(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2. \quad (4.17)$$

Знайдемо похідні від функції $u(\xi, \eta)$ щодо x_1 та x_2 . Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = -2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} =, \quad (4.18) \\ &= 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 12 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} =, \quad (4.19) \\ &= -2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} =, \quad (4.20) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Знайдемо x_1 та x_2 з виразів (4.16) та (4.17). Отримаємо:

$$x_1 = \frac{\eta - \xi}{5}, \quad (4.21)$$

$$x_2 = \frac{3\xi + 2\eta}{5}. \quad (4.22)$$

Підставляючи вирази (4.18)–(4.22) у рівняння (4.15), маємо канонічну форму гіперболічного рівняння (4.15):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{(3\xi + 2\eta)(\xi - \eta)}{625}.$$

Розв'язавши це рівняння і підставляючи в розв'язок вирази (4.16) і (4.17), можна отримати розв'язок рівняння (4.15).

2. Нехай

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0. \quad (4.23)$$

У цьому випадку тип рівняння (4.2) називають параболічним. Оскільки розв'язки рівнянь (4.10) і (4.11) збігаються, то можна отримати тільки один перший інтеграл цих рівнянь $\varphi(x_1, x_2)$. Покладемо у цьому випадку

$$\xi = \varphi(x_1, x_2), \eta = \eta(x_1, x_2),$$

де $\eta(x_1, x_2)$ — будь-яка функція, яка є лінійно незалежною з $\varphi(x_1, x_2)$.

Оскільки з рівності (4.23) випливає, що

$$a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}},$$

то

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right)^2 = \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right)^2 = 0, \\ \tilde{a}_{12} &= a_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + a_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) + a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \\ &= \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right) \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Отже \tilde{a}_{11} і \tilde{a}_{12} у рівнянні (4.5) дорівнюють нулю і це рівняння можна привести до вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta \right), \quad (4.24)$$

де $\Phi = -\frac{\tilde{F}}{2\tilde{a}_{22}}$.

Рівняння (4.24) є канонічною формою рівняння параболічного типу.

Приклад 4.2.

Привести до канонічної форми рівняння:

$$9 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}. \quad (4.25)$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$9 \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)^2 - 6 \frac{dx_2}{dx_1} + 1 = 0.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-9}}{9} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки характеристичне рівняння має один вироджений корінь, то вихідне ДРЧП відноситься до параболічного типу. Знайдемо перший інтеграл характеристичного рівняння. Маємо:

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \varphi_2(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2.$$

Оберемо нову змінну $\xi(x_1, x_2)$, рівною першому інтегралу характеристичного рівняння:

$$\xi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2. \quad (4.26)$$

Як іншу змінну $\eta(x_1, x_2)$ оберемо будь-яку функцію, якає лінійно незалежною із функцією (4.26), наприклад:

$$\eta(x_1, x_2) = x_1 + x_2. \quad (4.27)$$

Знайдемо похідні від функції $u(\xi, \eta)$ щодо x_1 та x_2 . Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} =, \quad (4.30) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} =, \quad (4.31) \\ &= -3 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} =, \quad (4.32) \\ &= 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Знайдемо x_1 та x_2 з виразів (4.26) та (4.27). Отримаємо:

$$x_1 = \frac{\xi + 3\eta}{4}, \quad (4.33)$$

$$x_2 = \frac{\eta - \xi}{4}. \quad (4.34)$$

Підставляючи вирази (4.28)–(4.32) у рівняння (4.25), маємо канонічну форму параболічного рівняння (4.25):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{16} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Розв'язавши це рівняння і підставляючи у розв'язок вирази (4.33) і (4.34), отримаємо розв'язок рівняння (4.25).

3. Припустимо, що

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0. \quad (4.35)$$

У цьому випадку рівняння називають еліптичним. Оскільки праві частини рівнянь (4.10) та (4.11) є комплексно спряженими, то і перші інтеграли цих рівнянь будуть комплексно спряженими. Нехай перший інтеграл рівняння (4.10) дорівнює $\varphi(x_1, x_2)$. Тоді перший інтеграл рівняння (4.11) буде комплексно спряженою функцією $\bar{\varphi}(x_1, x_2)$. Перейдемо до комплексних змінних:

$$\xi = \varphi(x_1, x_2), \eta = \bar{\varphi}(x_1, x_2).$$

При цьому, канонічна форма рівняння еліптичного типу буде такою ж, як для гіперболічного, однак щодо комплексних змінних. Щоб не мати справу з комплексними змінними, введемо дійсні змінні α і β , що дорівнюють:

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \beta = \frac{\xi - \eta}{2i},$$

тобто

$$\xi = \alpha + j\beta, \eta = \alpha - j\beta$$

У цьому випадку:

$$\begin{aligned}
& a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right)^2 = \\
& = a_{11} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + j \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + j \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + j \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right) + \\
& \quad + a_{22} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + j \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right)^2 = \\
& = \left(a_{11} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + a_{22} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)^2 \right) - \\
& - \left(a_{11} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + a_{22} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right)^2 \right) + \\
& + 2j \left(a_{11} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + a_{12} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right) + a_{22} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Для того, щоб рівність (4.36) стала тотожною необхідно, щоб були виконані умови:

$$\begin{aligned}
& \left(a_{11} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + a_{22} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)^2 \right) = \\
& = \left(a_{11} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + a_{22} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right)^2 \right), \quad (4.37)
\end{aligned}$$

$$\left(a_{11} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + a_{12} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right) + a_{22} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (4.38)$$

Однак, в рівності (4.37) зправа записано \tilde{a}_{11} , а зліва \tilde{a}_{22} . Тоді з рівності (4.37) маємо:

$$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22}. \quad (4.39)$$

Зправа у рівності (4.38) записано \tilde{a}_{12} . Отже

$$\tilde{a}_{12} = 0. \quad (4.40)$$

Враховуючи рівності (4.39) та (4.40), канонічна форма рівняння еліптичного типу набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, u, \alpha, \beta \right). \quad (4.41)$$

Приклад 4.3.

Привести до канонічної форми рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 13 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - 2x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}. \quad (4.42)$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)^2 + 4 \frac{dx_2}{dx_1} + 13 = 0.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = -2 \pm 3i.$$

Оскільки характеристичне рівняння має комплексні корені, то вихідне ДРЧП відноситься до еліптичного типу. Знайдемо перші інтеграли характеристичного рівняння. Вони є комплексно спряженими:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_2 + 3x_1 i \\ \varphi_2(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_2 - 3x_1 i \end{aligned}$$

Оберемо нову змінну $\xi(x_1, x_2)$, рівною дійсній частині перших інтегралів характеристичного рівняння. Уявну частину перших інтегралів оберемо як змінну $\eta(x_1, x_2)$:

$$\xi(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \varphi_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2. \quad (4.43)$$

$$\eta(x_1, x_2) = \operatorname{Im} \varphi_1(x_1, x_2) = 3x_1 \quad (4.44)$$

Знайдемо похідні від функції $u(\xi, \eta)$ щодо x_1 та x_2 . Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = , \quad (4.47) \\ &= 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = , \quad (4.48) \\ &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = , \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}
\end{aligned}
\tag{4.49}$$

Знайдемо x_1 та x_2 із виразів (4.43) та (4.44). Отримаємо:

$$x_1 = \frac{\eta}{3}, \tag{4.50}$$

$$x_2 = \xi - \frac{2\eta}{3}. \tag{4.51}$$

Підставляючи вирази (4.45)–(4.51) у рівняння (4.42), отримуємо канонічну форму еліптичного рівняння (4.42):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{9} \left(\xi - \frac{2\eta}{3} \right) \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{2\eta}{27} \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Розв'язавши це рівняння і підставляючи у розв'язок вирази (4.50) і (4.51), отримаємо розв'язок рівняння (4.42).

Отримані результати узагальнимо на випадок функцій n змінних:

1. Якщо в точці $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у канонічній формі рівняння (4.1) всі коефіцієнти біля похідних вищих порядків щодо однієї й тієї ж змінної є відмінними від нуля та мають один і той же знак, то рівняння в цій точці називається рівнянням еліптичного типу.

2. Якщо канонічній формі рівняння (4.1) у точці $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ містить всі коефіцієнти біля похідних вищих порядків щодо однієї й тієї ж змінної мають різні знаки, але при цьому всі вони відмінні від 0, то рівняння в цій точці називається рівнянням гіперболічного типу.

3. Якщо в точці $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у канонічній формі рівняння (4.1) хоча б один коефіцієнт біля похідної вищого порядку щодо однієї й тієї ж змінної дорівнює нулю, то рівняння в цій точці називається рівнянням параболічного типу.

4.2. Приклади фізичних задач, які описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними другого порядку.

4.2.1. Хвильове рівняння та його розв'язки. Формула Даламбера для задачі Коші. Розв'язання крайової задачі.

Хвильовими рівняннями описують різні коливальні процеси. У загальному випадку хвильове рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u + g(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (4.52)$$

де $\nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, v — стала, що має значення швидкості,

$g(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ — відома функція.

Якщо $g(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \equiv 0$, то хвильове рівняння називається однорідним, в іншому випадку других — неоднорідним. Неоднорідне хвильове рівняння називають також рівнянням вимушених коливань, а однорідне — вільних коливань.

Відповідно до раніше розглянутої класифікації рівняння (4.52) відноситься до гіперболічного типу.

Розглянемо однорідне одновимірне хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.53)$$

Для цього рівняння характеристичне рівняння (4.9) набуде вигляду:

$$v^2 dt^2 - dx^2 = 0.$$

Останнє рівняння розпадається на два:

$$(dx + vdt)(dx - vdt) = 0$$

і має два перших інтеграла:

$$\varphi_1 = x + vt, \quad \varphi_2 = x - vt.$$

Вводячи нові змінні

$$\xi = x + vt, \quad \eta = x - vt, \quad (4.54)$$

хвильове рівняння перетвориться до вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є:

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

де f_1, f_2 — довільні функції тільки змінних ξ і η .

Враховуючи вирази (4.54) загальний розв'язок хвильового рівняння (4.53) запишеться у вигляді:

$$u(x, t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt). \quad (4.55)$$

Таким чином загальне розв'язок хвильового рівняння (4.53) являє собою дві хвилі, що поширюються в протилежних напрямках.

Для виділення із загального розв'язку часткових розв'язків ставляться додаткові умови. Якщо задаються початкові умови в момент часу $t = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x), \end{aligned} \tag{4.56}$$

де $\varphi(x), \psi(x)$ — відомі функції, то говорять про задачу Коші. Якщо задають умови на краях відрізка $[0, l]$, на якому шукається розв'язок, то говорять про крайову задачу. Для крайових задач можуть задаватись значення функції u на краях відрізка:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t), \\ u(l, t) &= \nu(t), \end{aligned}$$

де $\mu(t), \nu(t)$ — відомі функції. У цьому випадку граничні умови називають умовами Діріхле. Якщо на краях відрізка задають лінійні комбінації похідних, то граничні умови називають умовами Неймана. Якщо ж задаються лінійні комбінації функції u і її похідних, то говорять про узагальнені граничні умови Неймана.

Розглянемо розв'язання задачі Коші. Визначимо функції f_1, f_2 таким чином, щоб вони задовольняли початковим умовам (4.56). Тоді:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \nu f_1'(x) - \nu f_2'(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

Інтегруючи другу рівність, отримаємо:

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \varphi(x), \\ f_1(x) - f_2(x) &= \frac{1}{\nu} \int_{x_0}^x \psi(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Звідки

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x_0}^x \psi(\lambda) d\lambda,$$
$$f_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2v} \int_{x_0}^x \psi(\lambda) d\lambda.$$

Підставляючи знайдені функції f_1, f_2 у розв'язок (4.55), маємо:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x_0}^{x+vt} \psi(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2v} \int_{x_0}^{x-vt} \psi(\lambda) d\lambda,$$

або

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(\lambda) d\lambda. \quad (4.57)$$

Формулу (4.57) називають формулою Даламбера.

Приклад 4.4.

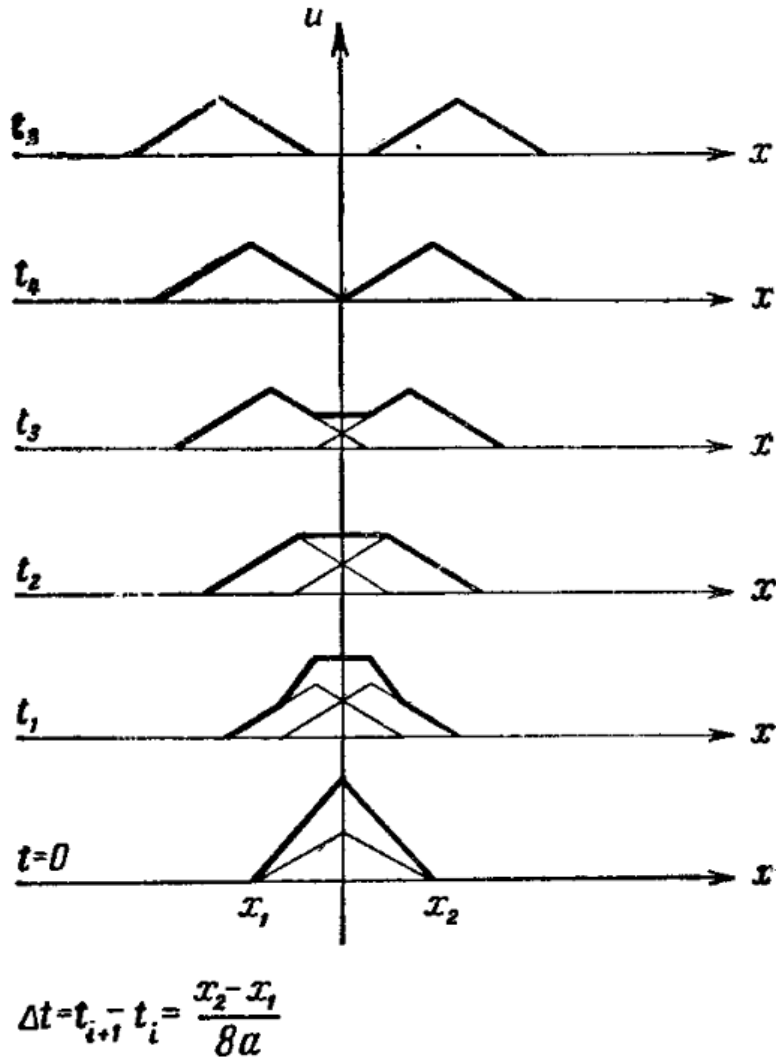
Нехай початкова швидкість у всіх точках дорівнює нулю, тобто $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \equiv 0$. Початкове відхилення $\varphi(x)$ в умові (4.56) визначимо наступним чином:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{a}{x_2}(x - x_2), & x_2 < x < 0 \\ \frac{a}{x_1}(x_1 - x), & 0 \leq x < x_1 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}.$$

Відповідно до формули Даламбера розв'язком задачі будуть дві хвилі, що поширюються у протилежних напрямках:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x+vt) + \frac{1}{2}\varphi(x-vt) .$$

Графіки $u(x,t)$, як функції від x для різних t подано на рисунку нижче.



Приклад 4.5.

Нехай початкове відхилення $\varphi(x) = 0$, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на відрізку $[x_1, x_2]$, де вона приймає стале значення v_0 :

$$\psi(x) = \begin{cases} v_0, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & x \notin [x_1, x_2] \end{cases} \quad (4.58)$$

Тоді з (4.57) маємо

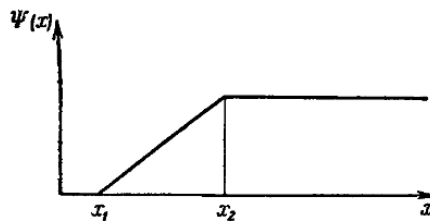
$$u(x,t) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(\lambda) d\lambda = \phi(x+vt) - \phi(x-vt),$$

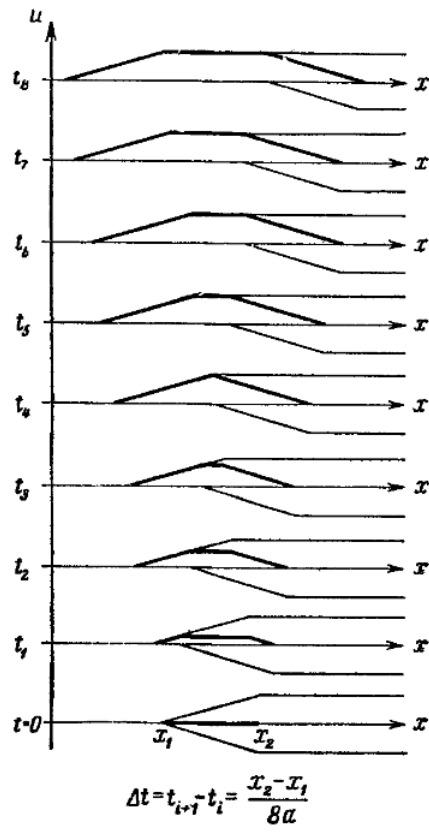
де $\phi(x) = \frac{1}{2v} \int_0^x \psi(\lambda) d\lambda$.

Отже розв'язком задачі буде сума хвиль з профілем ϕ , які поширюються в протилежних напрямках.

Обчислимо інтеграл:

$$\phi(x) = \frac{1}{2v} \int_0^x \psi(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ \frac{v_0}{2v}(x - x_1), & x_1 < x < x_2 \\ \frac{v_0}{2v}(x_2 - x_1), & x \geq x_2 \end{cases} \quad (4.59)$$





4.2.2. Рівняння дифузії та граничні умови для нього.

Дифузією називають спрямоване перенесення частинок внаслідок дисипації (розсіювання) за наявності градієнта концентрації частинок. Дифузійні процеси підпорядковуються закону Фіка:

$$\mathbf{j} = -D \operatorname{grad} u, \quad (4.60)$$

де \mathbf{j} — щільність потоку частинок, D — коефіцієнт дифузії, u — концентрація частинок.

Також для процесів дифузії є справедливим рівняння неперервності:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.61)$$

Підставляючи рівняння (4.60) у (4.61) отримаємо рівняння дифузії:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} D \operatorname{grad} u. \quad (4.62)$$

Враховуючи що $\operatorname{div} \alpha \mathbf{A} = \alpha \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \alpha \cdot \mathbf{A}$ і $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u$, із рівняння (4.62) отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u + \operatorname{grad} D \cdot \operatorname{grad} u. \quad (4.63)$$

Якщо коефіцієнт дифузії є сталим у всіх точках простору, то рівняння (4.62) набуде вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u. \quad (4.64)$$

Рівняння дифузії (4.63) і (4.64) відносяться до параболічного типу.

Для виділення єдиного розв'язку рівняння дифузії необхідно до рівнянь (4.64) чи (4.63) додати початкові і граничні умови. На відміну від рівнянь

гіперболічного типу для параболічних рівнянь можна задати тільки одну початкову умову. Друга умова має бути граничною. Тому задачі дифузії завжди є крайовими. Граничні умови можуть бути умовами Діріхле, якщо відомі концентрації частинок на границях або Неймана, якщо на границях відомо щільності потоків частинок з врахуванням закону Фіка (4.60).

4.2.3. Рівняння теплопровідності та граничні умови для нього.

Теплові процеси, що відбуваються в середовищі, є пов'язаними з трьома основними закономірностями:

1. Якщо температура середовища нерівномірна, то в ній виникають теплові потоки, спрямовані з місць з більш високою температурою в місця з більш низькою температурою. Цей процес описується експериментально встановленим законом Фур'є, згідно з яким щільність теплового потоку \mathbf{q} , яка визначає кількість теплоти, що протікає через одиничну площадку за одиницю часу, дорівнює

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} u,$$

де k — коефіцієнт теплопровідності середовища (дорівнює кількості тепла, що переноситься в одиницю часу через одиницю площі за градієнта температури, що дорівнює одиниці), u — температура.

2. Кількість теплоти, яку необхідно надати однорідному тілу, щоб підвищити його температуру на Δu , дорівнює

$$Q_1 = ct\Delta u = c\rho V\Delta u,$$

де c — питома теплоємність, m — маса тіла, ρ — його густина, V — об'єм тіла.

Якщо зміна температури відрізняється від точки до точки або середовище є неоднорідним, то

$$Q_1 = \int_V c\rho\Delta u dv.$$

3. У середині середовища може виникати або поглинатися тепло (наприклад під час проходження струму, хімічних реакцій і т.д.). Виділення тепла може бути охарактеризовано щільністю теплових джерел g , що дорівнює кількості теплоти, яка виділяється в елементарному об'ємі за одиницю часу. В результаті дії цих джерел за проміжок часу Δt виділиться кількість тепла

$$Q_2 = \int_V g dv \Delta t.$$

Розглянемо середовище, в якому відбувається перенесення тепла, і виділимо в ній замкнуту поверхню S , що оточує об'єм V . Для кількості тепла Q_3 , що протікає через поверхню S за час Δt , маємо:

$$Q_3 = \oint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{s} \Delta t = - \oint_S k \operatorname{grad} u \cdot d\mathbf{s} \Delta t,$$

де $d\mathbf{s} = ds \cdot \mathbf{n}$, ds — площа елементарної поверхні, \mathbf{n} — вектор нормалі до поверхні, спрямований назовні.

Кількість тепла, що накопичено в об'ємі, дорівнює кількості тепла, виділеного в об'ємі джерелами за вирахуванням тепла, яке перенесено через поверхню S . Це тепло витрачається на зміну температури середовища. Тоді, виходячи із закону збереження енергії, маємо:

$$Q_1 = Q_2 - Q_3,$$

або

$$\int_V c\rho \Delta u dv = \int_V g dv \Delta t + \oint_S k \operatorname{grad} u \cdot d\mathbf{s} \Delta t.$$

Розділивши обидві частини останньої рівності на Δt і переходячи до границі за умови, що $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо рівняння теплопровідності в інтегральній формі:

$$\int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv = \int_V g dv + \oint_S k \operatorname{grad} u \cdot ds.$$

Застосовуючи до останньої рівності теорему Остроградського-Гауса, маємо:

$$\int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv = \int_V g dv + \int_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dv.$$

Звідки отримуємо рівняння теплопровідності в диференціальній формі:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + g.$$

Якщо питома теплоємність і густина середовища не змінюються від точки до точки, то останнє рівняння можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u + \operatorname{grad} a^2 \cdot \operatorname{grad} u + G, \quad (4.65)$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ — коефіцієнт температуропровідності, $G = \frac{g}{c\rho}$.

Якщо коефіцієнт температуропровідності постійний у всіх точках простору і джерела тепла відсутні, то рівняння (4.65) набуде вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u. \quad (4.66)$$

Рівняння теплопровідності (4.64) і (4.66) відносяться до параболічного типу. А тому для нього не можна поставити задачу Коші, а може бути задано тільки одно початкову умову, задаючи значення функції $u(x, t)$ в момент часу $t = 0$. Тому задачі теплопровідності завжди є крайовими. Розглянемо деякі крайові задачі на прикладі одновимірного випадку (поширення тепла в стержні) [35, с.188].

Граничні умови можуть бути різними залежно від температурного режиму на кінцях стержня. Розглядають три основних типи граничних умов:

1. Умова Діріхле, якщо на кінці стержня, у точці $x = l$, задано температуру

$$u(l, t) = \mu(t),$$

де $\mu(t)$ — визначена функція.

2. Умова Неймана, коли на границі $x = l$ задано похідну:

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = v(t),$$

де $v(t)$ — відома функція.

До цієї умови ми приходимо, якщо задано величину теплового потоку на границі:

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}.$$

Тоді $v(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}$.

3. Узагальнена умова Неймана, якщо на границі $x = l$ задано лінійне співвідношення між похідною і функцією:

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \lambda u(l, t) = \eta \theta(t),$$

де λ, η — відомі сталі, а $\theta(t)$ — визначена функція.

Ця гранична умова відповідає теплообміну за законом Ньютона на поверхні тіла з навколишнім середовищем, температура якого є відомою. Згідно з цим законом, кількість тепла q , що втрачається тілом та розрахована на одиницю об'єму і часу, дорівнює:

$$q = h(u - \theta(t)),$$

де h — коефіцієнт теплообміну, $\theta(t)$ — температура навколишнього середовища. Прирівнюючи теплові потоки, що виникають внаслідок законів Фур'є і Ньютона, отримаємо узагальнену умову Неймана, у якій $\lambda = \eta = \frac{h}{k}$.

На різних границях можуть задаватися різні типи граничних умов, так що число типів крайових задач є великим.

4.2.4. Рівняння електростатики. Рівняння Пуассона та Лапласа та граничні умови для них.

Згідно з теоремою Гауса у диференціальній формі:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (4.67)$$

де \mathbf{D} — індукція електричного поля, ρ — об'ємна щільність заряду.

З огляду на, що індукція електричного поля пов'язана з його напруженістю \mathbf{E} співвідношенням:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

де ε — відносна діелектрична проникність середовища, ε_0 — електрична стала (діелектрична проникність вакууму), а напруженість електричного поля виражається через електричний потенціал u співвідношенням:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u, \quad (4.68)$$

для ізотропного середовища з рівняння (4.67) маємо:

$$\operatorname{div} \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{grad} u = -\rho,$$

або

$$\varepsilon \nabla^2 u + \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \operatorname{grad} u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (4.69)$$

Рівняння (4.69) називають рівнянням Пуассона. Якщо в середовищі заряди відсутні ($\rho = 0$), то рівняння Пуассона перетворюється у рівняння Лапласа:

$$\varepsilon \nabla^2 u + \text{grad } \varepsilon \cdot \text{grad } u = 0. \quad (4.70)$$

В однорідному середовищі рівняння Пуассона і Лапласа спрощуються:

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (4.71)$$

$$\nabla^2 u = 0. \quad (4.72)$$

Рівняння Пуассона і Лапласа відносяться до еліптичному типу.

Для еліптичних рівнянь ставлять виключно крайові задачі. Розглянемо типи граничних умов для рівнянь Пуассона і Лапласа. Якщо відомі розподіли потенціалів на границях, то задають граничні умови Діріхле:

$$u(l_i) = \varphi(l_i), i = \overline{1, N}$$

де l_i описує i -ту границю, $\varphi(l_i)$ – відома функція, що визначає потенціал у кожній точці границі, N – кількість границь.

Системи, для моделювання яких застосовують ці рівняння, зазвичай містять металеві електроди. Якщо відомі потенціали на них, то граничні умови Діріхле приймають вид:

$$u(l_i) = \varphi_i, i = \overline{1, N},$$

де $\varphi(l_i)$ – потенціал на i -му електроді.

Якщо відомий розподіл щільності струму, що протікає через границю, то згідно до закону Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

де σ – питома електропровідність середовища, та враховуючи співвідношення (4.68), задають граничні умови Неймана:

$$\mathbf{n} \operatorname{grad} u(l_i) = \frac{j(l_i)}{\sigma},$$

де \mathbf{n} – вектор, який напрямлено перпендикулярно до границі, $j(l_i)$ – щільність струму, що тече перпендикулярно до границі, у кожній точці границі.

4.2.5. Рівняння електродинаміки. Векторні та скалярні потенціали електромагнітного поля. Вектори Герца. Зведення рівнянь електродинаміки до гіперболічних та еліптичних рівнянь.

Класична електродинаміка базується на рівняннях Максвелла [36, с.8]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (4.73)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.74)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (4.75)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.76)$$

Всі величини, що входять в ці рівняння є функціями координат (радіус-вектора \mathbf{r}) і часу t . Густина електричного струму \mathbf{J} і питома щільність заряду ρ характеризують розподіл джерел електромагнітного поля в просторі і часі. З цими величинами пов'язані «функції джерел» – електрична індукція (електричне зміщення) \mathbf{D} і напруженість магнітного поля \mathbf{H} . Крім того, в рівняння Максвелла входять силові функції напруженість електричного поля \mathbf{E} і магнітна індукція \mathbf{B} , що визначають сили, які діють на заряджені частинки.

Розглянемо деякі наслідки з рівнянь Максвелла. Застосувавши операцію дивергенції до обох частин рівняння (4.73), знайдемо:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) = 0,$$

оскільки дивергенція будь-якого ротора дорівнює нулю. Змінивши порядок диференціювання за координатами і часом, з урахуванням (4.75) отримаємо рівняння неперервності:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Індукції електричного і магнітного полів пов'язані з властивостями середовища рівняннями:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (4.77)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (4.78)$$

де ε — відносна діелектрична проникність середовища, $\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ — електрична стала (діелектрична проникність вакууму), c — швидкість світла у вакуумі, μ — відносна магнітна проникність середовища, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ — магнітна стала (магнітна проникність вакууму).

Враховуючи співвідношення (4.77) і (4.78), в систему рівнянь Максвелла входить шість невідомих функцій – проєкцій векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} на осі системи координат. Для зменшення числа невідомих функцій продиференціюємо за часом рівняння (4.73), поміняємо порядок похідних в лівій його частині і підставимо в нього $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, виражене з рівняння (4.74) і врахуємо співвідношення (4.77).

Отримаємо:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu \mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E} \right) + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0. \quad (4.79)$$

Після розв'язання рівняння (4.79) напруженість магнітного поля може бути знайдена з рівняння (4.73).

Аналогічно може бути знайдено рівняння щодо вектора \mathbf{H} :

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\operatorname{rot}\mathbf{H}-\mathbf{J})\right)+\mu\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0, \quad (4.80)$$

розв'язавши яке, можна знайти вектор \mathbf{E} з рівняння (4.74).

Інший шлях зменшення числа невідомих функцій, особливо ефективний під час аналізу електромагнітного поля в ізотропних середовищах, полягає у введенні допоміжних функцій – потенціалів електромагнітного поля. Відповідно до рівняння (4.76),

$$\mathbf{H}=\frac{\operatorname{rot}\mathbf{A}^e}{\mu\mu_0}, \quad (4.81)$$

так як дивергенція будь-якого ротора дорівнює нулю. Підставляючи (4.81) у рівняння (4.74), отримаємо:

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}^e}{\partial t}\right)=0,$$

звідки

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}^e}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi^e, \quad (4.82)$$

так як ротор градієнта будь-якої скалярної функції дорівнює нулю. Таким чином, вектори \mathbf{E} і \mathbf{H} визначені за допомогою функцій \mathbf{A}^e і φ^e , які називають векторним і скалярним електричним потенціалами.

Підставимо вирази (4.81) і (4.82) у рівняння (4.73):

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{A}^e\right)+\varepsilon\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2\mathbf{A}^e}{\partial t^2}+\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi^e}{\partial t}\right)=\mathbf{J}. \quad (4.83)$$

Розглянемо випадок однорідного середовища ($\mu = \text{const}$). У цьому випадку рівняння (4.83) переписеться у вигляді:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}^e+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{A}^e}{\partial t^2}+\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi^e}{\partial t}\right)=\mu\mu_0\mathbf{J}.$$

Використовуючи векторну тотожність $\operatorname{rot}\operatorname{rot}=\operatorname{grad}\operatorname{div}-\nabla^2$, перетворимо отримане співвідношення:

$$-\nabla^2\mathbf{A}^e+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}^e}{\partial t^2}+\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A}^e+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi^e}{\partial t}\right)=\mu\mu_0\mathbf{J}. \quad (4.84)$$

Визначимо дивергенцію вектора \mathbf{A}^e зі співвідношення:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}^e+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi^e}{\partial t}=0, \quad (4.85)$$

яке називають умовою калібрування Лоренца. З огляду на умову (4.85) рівняння (4.84) набуде вигляду:

$$\nabla^2\mathbf{A}^e-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}^e}{\partial t^2}=-\mu\mu_0\mathbf{J}. \quad (4.86)$$

Підставивши співвідношення (4.82) і (4.85) у рівняння (4.75) отримаємо рівняння щодо скалярного електричного потенціалу:

$$\nabla^2\varphi^e-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^e}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (4.87)$$

Таким чином, для розрахунку електромагнітного поля достатньо вирішити одне векторне і одне скалярне диференціальне рівняння. Електромагнітне поле потім обчислюється з виразів (4.81) і (4.82).

Для подальшого зменшення числа невідомих функцій за допомогою співвідношень

$$\mathbf{A}^e = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \Gamma^e}{\partial t}, \varphi^e = -\operatorname{div} \Gamma^e \quad (4.88)$$

введемо електричний вектор Герца Γ^e . Підставивши вираз (4.88) у (4.85), переконуємося, що умова калібрування Лоренца виконується.

З огляду на співвідношення (4.88), вирази (4.81) і (4.82) набудуть вигляду:

$$\mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \Gamma^e, \quad (4.89)$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Gamma^e - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma^e}{\partial t^2}. \quad (4.90)$$

Підставляючи вирази (4.88) у рівняння (4.86), одержимо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 \Gamma^e - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma^e}{\partial t^2} \right) = -\mu\mu_0 \mathbf{J}.$$

Звідки

$$\nabla^2 \Gamma^e - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma^e}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \int_0^t \mathbf{J} dt. \quad (4.91)$$

Таким чином, обчислення електромагнітного поля звелось до розв'язання трьох диференціальних рівнянь щодо трьох проекцій електричного вектора Герца на осі системи координат. Після розв'язання цього рівняння компоненти електромагнітного поля знаходять з виразів (4.89) і (4.90).

Відзначимо, що з виразів (4.89) і (4.90) випливає, що вектор \mathbf{H} завжди перпендикулярний до вектора Герца, в той час як вектор \mathbf{E} може мати як поперечні, так і поздовжні складові. Тому електромагнітне поле, що описується електричним вектором Герца, називають полем електричного або E -типа.

Поряд з електричним, зручно користуватися магнітними векторними і скалярними потенціалами і магнітним вектором Герца. Електричне і магнітне поле пов'язані з магнітними векторним \mathbf{A}^m і скалярним φ^m потенціалами співвідношеннями:

$$\mathbf{E} = \frac{\text{rot } \mathbf{A}^m}{\varepsilon\varepsilon_0} - \int_0^t \mathbf{J} dt, \quad (4.92)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{A}^m}{\partial t} + \text{grad } \varphi^m. \quad (4.93)$$

Тоді, за умови виконання калібрування Лоренца, одержуємо:

$$\text{div } \mathbf{A}^m + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \varphi^m}{\partial t} = 0, \quad (4.94)$$

а з виразу (4.74) маємо:

$$\nabla^2 \mathbf{A}^m - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^m}{\partial t^2} = \int_0^t \text{rot } \mathbf{J} dt, \quad (4.95)$$

$$\nabla^2 \varphi^m - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^m}{\partial t^2} = 0. \quad (4.96)$$

Вводячи магнітний вектор Герца (вектор Фітцджеральда)

$$\mathbf{A}^m = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{\Gamma}^m}{\partial t}, \varphi^m = -\text{div } \mathbf{\Gamma}^m, \quad (4.97)$$

знайдемо:

$$\nabla^2 \mathbf{\Gamma}^m - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}^m}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \int_0^t \int_0^t \text{rot } \mathbf{J} dt dt. \quad (4.98)$$

Після розв'язання рівняння (4.98) напруженості електричного і магнітного поля отримуємо з виразів:

$$\mathbf{E} = \mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Gamma^m - \int_0^t \mathbf{J} dt, \quad (4.99)$$

$$\mathbf{H} = \text{grad div } \Gamma^m - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma^m}{\partial t^2}. \quad (4.100)$$

4.3. Формула Гріна та метод функції Гріна для рівняння Лапласа і Пуассона. Потенціальне поле. Поле точкового джерела.

4.4. Метод Фур'є (ділення змінних) розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.

4.4.1. Рівняння Гельмгольца в прямокутній системі координат.

Рівняння Гельмгольца має вигляд:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad (4.101)$$

де k – стала, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в прямокутній системі координат.

Метод Фур'є (ділення змінних) ґрунтується на поданні функції $u(x, y, z)$ як добутку трьох функцій, які відповідно залежать тільки від x , y та z :

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (4.102)$$

Підставляючи подання (4.102) у рівняння (4.101), отримаємо:

$$Y(y)Z(z)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + X(x)Y(y)\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + k^2X(x)Y(y)Z(z) = 0$$

Розділивши останнє рівняння на вираз (4.102), маємо:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -k^2. \quad (4.103)$$

У отриманому рівнянні сума трьох функцій від різних аргументів дорівнює сталій. Це можливо тільки у випадку, коли кожна з функцій дорівнює сталій. Припустимо, що

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\beta_x^2, \quad (4.104)$$

де β_x – стала. В результаті отримуємо рівняння відносно функції $X(x)$:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \beta_x^2X(x) = 0. \quad (4.105)$$

Рівняння (4.105) має часткові розв'язки $\cos\beta_x x$ і $\sin\beta_x x$ або $\exp(j\beta_x x)$ і $\exp(-j\beta_x x)$. Отже загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді:

$$X(x) = A_{x1} \cos\beta_x x + A_{x2} \sin\beta_x x = A_x \cos(\beta_x x + \varphi_x),$$

або

$$X(x) = A_{x1} \exp(j\beta_x x) + A_{x2} \exp(-j\beta_x x),$$

де A_{x1} , A_{x2} – сталі, $A_x = \sqrt{A_{x1}^2 + A_{x2}^2}$, $\varphi_x = \arccos\left(\frac{A_{x1}}{A_x}\right) = \arcsin\left(-\frac{A_{x2}}{A_x}\right)$.

Аналогічно отримуємо рівняння відносно $Y(y)$ та $Z(z)$:

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \beta_y^2 Y(y) = 0, \quad (4.106)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \beta_z^2 Z(z) = 0, \quad (4.107)$$

де β_y, β_z – сталі.

З рівнянь (4.103), (4.104), (4.106) і (4.107) випливає, що сталі $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ та k пов'язані між собою співвідношенням:

$$k^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2.$$

Загальні розв'язки рівнянь (4.106) та (4.107) мають вигляд:

$$Y(y) = A_{y1} \cos \beta_y y + A_{y2} \sin \beta_y y = A_y \cos(\beta_y y + \varphi_y),$$

$$Z(z) = A_{z1} \cos \beta_z z + A_{z2} \sin \beta_z z = A_z \cos(\beta_z z + \varphi_z),$$

або

$$Y(y) = A_{y1} \exp(j\beta_y y) + A_{y2} \exp(-j\beta_y y),$$

$$Z(z) = A_{z1} \exp(j\beta_z z) + A_{z2} \exp(-j\beta_z z),$$

де $A_{y1}, A_{y2}, A_{z1}, A_{z2}$ – сталі, $A_y = \sqrt{A_{y1}^2 + A_{y2}^2}$, $A_z = \sqrt{A_{z1}^2 + A_{z2}^2}$,

$$\varphi_y = \arccos\left(\frac{A_{y1}}{A_y}\right) = \arcsin\left(-\frac{A_{y2}}{A_y}\right), \quad \varphi_z = \arccos\left(\frac{A_{z1}}{A_z}\right) = \arcsin\left(-\frac{A_{z2}}{A_z}\right).$$

Загальний розв'язок рівняння Гельмгольца (4.101) згідно подання (4.102) визначається добутком загальних розв'язків для функцій $X(x), Y(y), Z(z)$. Сталі $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ визначаються граничними умовами. Слід зазначити, що метод Фур'є можна застосовувати тільки якщо граничні умови ставляться на координатних поверхнях, які в прямокутній системі координат є площини, що перпендикулярні до осей координат.

4.4.2. Рівняння Гельмгольца в циліндричній системі координат.

Функції Бесселя.

В циліндричній системі координат оператор Лапласа має вигляд:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (4.108)$$

де r – радіальна відстань, φ – азимутальний кут, z – висота.

Для розв'язання рівняння (4.101) подамо функцію u як добуток функцій, які залежать тільки від одного аргументу:

$$u(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z). \quad (4.109)$$

Підставляючи це подання в рівняння (4.101) та розділивши ліву та праву частини на (4.109) отримаємо:

$$\frac{1}{rR(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{1}{r^2\Phi(\varphi)} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -k^2.$$

Для того щоб сума функцій різних аргументів дорівнювала сталій необхідно, щоб кожна з функцій дорівнювала сталій. Тому

$$\frac{1}{rR(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{1}{r^2\Phi(\varphi)} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -\beta^2, \quad (4.110)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -\beta_z^2,$$

де β , β_z – сталі, такі, що

$$\beta^2 + \beta_z^2 = k^2.$$

Розв'язання рівняння відносно функції $Z(z)$ було розглянуто в попередньому параграфі, див. рівняння (4.107). Щоб розв'язати рівняння (4.110) припустимо, що

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -n^2, \quad (4.111)$$

де n – ціле число. Нормованим розв'язком останнього рівняння є

$$\Phi(\varphi) = \sin(n\varphi + \phi),$$

де ϕ – сталий кут, який визначається симетрією задачі.

Враховуючи формулу (4.111), рівняння (4.110) можна переписати у вигляді:

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + (\beta^2 r^2 - n^2) R(r) = 0. \quad (4.112)$$

Рівняння (4.112) називають рівнянням Бесселя. Його розв'язками є:

$$R(r) = AB_n(\beta r),$$

де A – стала, $B_n(x)$ – функція Бесселя n -го порядку [29]. Виділяють функції Бесселя першого роду (просто функції Бесселя) $J_n(x)$, функції Бесселя другого роду (функції Неймана) $Y_n(x)$ та функції Бесселя третього роду (функції Ханкеля), $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$.

Функція Бесселя першого роду будь-якого порядку, включаючи дійсний, подається рядом Маклорена [29]:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(n+k+1)},$$

де $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ – гамма функція, для цілого аргументу $\Gamma(m+1) = m!$.

Функції Бесселя першого і другого родів пов'язані між собою наступним співвідношенням:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)},$$

де ν – дійсне число.

Графіки функцій Бесселя першого і другого родів порядків з нульового до третього показані на рис. 4.1.

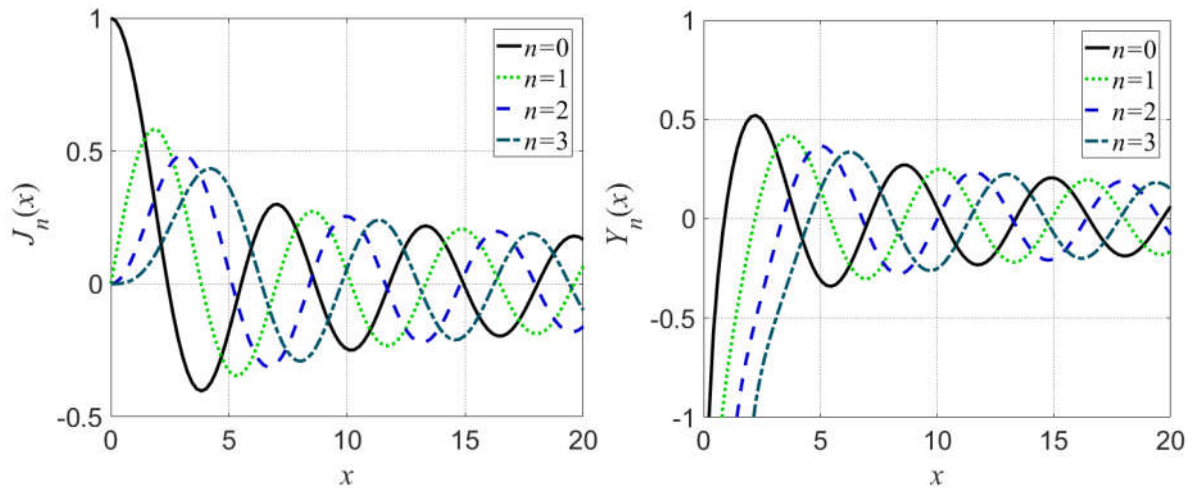


Рис. 4.1. Функції Бесселя першого та другого роду з нульового до третього порядку

Функції Ханкеля виражаються через функції Бесселя першого і другого роду наступним чином:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + jY_n(x),$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - jY_n(x).$$

Функції Бесселя задовольняють наступним рекурентним співвідношенням:

$$B_{n-1}(x) + B_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} B_n(x),$$

$$B_{n-1}(x) - B_{n+1}(x) = 2 \frac{dB_n(x)}{dx},$$

$$\frac{dB_n(x)}{dx} = B_{n-1}(x) - \frac{n}{x} B_n(x),$$

$$\frac{dB_n(x)}{dx} = -B_{n+1}(x) + \frac{n}{x}B_n(x).$$

В деяких задачах значення β^2 стає відмінним. В цьому випадку розв'язками задачі (4.112) є модифіковані функції Бесселя першого роду (функції Інфельда) $I_n(x)$ та другого роду (функції Макдональдса) $K_n(x)$. Ці функції пов'язані з функціями Бесселя наступними співвідношеннями:

$$I_n(x) = e^{-j\frac{\pi}{2}} J_n\left(e^{j\frac{\pi}{2}}x\right),$$

$$K_n(x) = j\frac{\pi}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} H_n^{(1)}\left(e^{j\frac{\pi}{2}}x\right).$$

Графіки функцій Бесселя першого і другого родів порядків з нульового до третього показані на

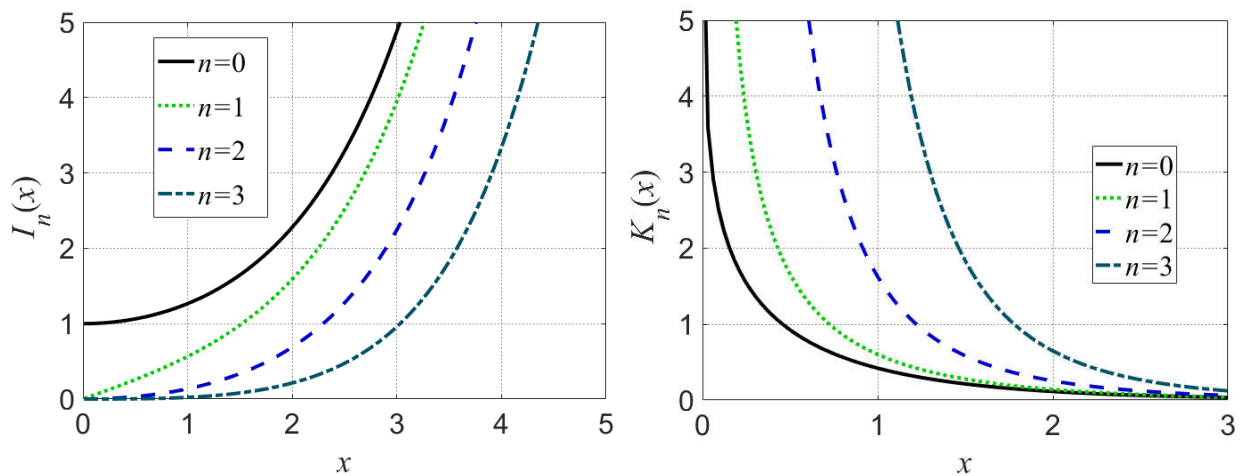


Рис. 4.2. Модифіковані функції Бесселя першого та другого роду з нульового до третього порядку

4.4.3. Рівняння Гельмгольца в сферичній системі координат.

Приєднані функції Лежандра. Сферичні функції Бесселя.

В сферичній системі координат оператор Лапласа має вигляд:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

де r – радіальна відстань, θ – зенітний кут, φ – азимутальний кут.

Будемо шукати розв'язок у вигляді добутку трьох функцій, що залежать тільки від однієї змінної:

$$u(r, \varphi, \theta) = R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta). \quad (4.113)$$

Підставляючи це подання в рівняння (4.101) та розділивши ліву та праву частини на (4.113) отримаємо:

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi) \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) \right) = -k^2.$$

Для того, щоб останнє рівняння задовольнялось для будь-яких φ і θ необхідно, щоб у ньому сума другого і третього доданка в лівій частині дорівнювала константі. Отже, це рівняння розпадається на два:

$$\frac{1}{\Phi(\varphi) \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = l,$$

$$\frac{d^2 (r^2 R(r))}{dr^2} + (k^2 r^2 + l) R(r) = 0,$$

де l – константа.

Для того, щоб рівняння відносно функцій $\Phi(\varphi)$ та $\Theta(\theta)$ було задоволено за будь-яких φ необхідно, щоб вираз $\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2}$ дорівнював константі. Отже:

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0,$$

де m – константа.

Частковим розв'язком останнього рівняння є функції $\cos m\varphi$ та $\sin m\varphi$. Для неперервності розв'язків m повинно бути натуральним числом.

Тоді з урахуванням розв'язків для функції $\Phi(\varphi)$ рівняння відносно функції $\Theta(\theta)$ матиме вигляд:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} - \left(\frac{m^2}{\sin^2\theta} + l \right) \Theta = 0.$$

Це рівняння має ненульові розв'язки тільки за умови

$$l = -n(n-1).$$

Для неперервності розв'язків n повинно бути натуральним числом.

Провівши заміну змінних $\xi = \cos\theta$ і враховуючи, що

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} = \sin^2\theta \frac{d^2}{d\xi^2} - \cos\theta \frac{d}{d\xi},$$

рівняння відносно функції

$\Theta(\theta)$ набуде вигляду:

$$(1-\xi^2) \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\Theta}{d\xi} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right) \Theta = 0.$$

Розв'язками цього рівняння є приєднані функції Лежандра першого роду ступеня n і порядку m $P_n^m(\xi)$. Деякі приєднані поліноми Лежандра приведено нижче:

$$P_n^m(x) = 0, m > n,$$

$$P_n^0(x) = P_n(x),$$

де $P_n(x)$ – ортогональні поліноми Лежандра:

$$P_0(\xi) = 1, P_1(\xi) = \xi = \cos \theta, P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1),$$

$$P_3(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi)$$

$$P_1^1(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} = \sin \theta$$

$$P_2^1(\xi) = 3\xi\sqrt{1 - \xi^2} = \frac{3}{2}\sin 2\theta$$

$$P_2^2(\xi) = 2(1 - \xi^2) = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$P_3^1(\xi) = \frac{3}{2}(5\xi^2 - 1)\sqrt{1 - \xi^2} = \frac{3}{8}(\sin \theta + 5\sin 3\theta)$$

$$P_3^2(\xi) = 15\xi(1 - \xi^2) = \frac{15}{4}\cos \theta(\cos \theta - \cos 3\theta)$$

$$P_3^3(\xi) = 15(1 - \xi^2)\sqrt{1 - \xi^2} = \frac{15}{4}(3\sin \theta - \sin 3\theta)$$

$$P_i^i(\xi) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2i - 1)(1 - \xi^2)^{\frac{i}{2}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2i - 1)\sin^i \theta$$

Враховуючи розв'язки для функцій $\Phi(\varphi)$ та $\Theta(\theta)$ рівняння відносно функції $R(r)$ набуде вигляду:

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2r \frac{dR(r)}{dr} + (k^2 r^2 - n(n+1))R(r) = 0.$$

Частковими розв'язками цього рівняння є сферичні функції Бесселя першого роду:

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr),$$

другого роду:

$$y_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Y_{n+\frac{1}{2}}(kr),$$

і третього роду:

$$h_n^{(1)}(kr) = j_n(kr) + jy_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr),$$

$$h_n^{(2)}(kr) = j_n(kr) - jy_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr),$$

де J, Y, H – функції Бесселя відповідно першого, другого та третього родів.

Деякі властивості сферичних функцій Бесселя наведено нижче.

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$$j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}$$

$$j_2(z) = \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \sin z - \frac{3 \cos z}{z^2}$$

$$y_0(z) = -\frac{\cos z}{z}$$

$$y_1(z) = -\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\sin z}{z}$$

$$y_2(z) = \left(-\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z} \right) \cos z - \frac{3 \sin z}{z^2}$$

$$\frac{d}{dz} \mathfrak{R}_n(z) = \mathfrak{R}_{n-1}(z) - \frac{n+1}{z} \mathfrak{R}_n(z)$$

5. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

5.1. Метод скінченних різниць.

5.2. Проекційні методи.

5.3. Метод скінчених елементів.

6. Інтегральні рівняння. Основні поняття та приклади використання.

Контрольні завдання

1. .

Варіанти завдань

- | | |
|-----|-----|
| 1. | 2. |
| 3. | 4. |
| 5. | 6. |
| 7. | 8. |
| 9. | 10. |
| 11. | 12. |
| 13. | 14. |
| 15. | 16. |
| 17. | 18. |
| 19. | 20. |
| 21. | 22. |
| 23. | 24. |
| 25. | 26. |
| 27. | 28. |
| 29. | 30. |

Список використаної літератури

1. *Мэтьюз Джон Д., Финк Куртис Д.* Численные методы. Использование Matlab: Пер. с англ. – 3-е изд. – М.: Издат. дом «Вильямс», 2001. – 720 с.
2. *Бахвалов Н. С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. –М.: Наука, 1987. – 600 с.
3. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. - М.:Наука,1989. –432 с.
4. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 665 с.
5. *Вержбицкий В.М.* Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. – М.:Высшая школа, 2000.– 266 с. – ISBN 5-06-003654-5.
6. *Денис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с. – ISBN 5-03-001102-1.
7. *Сигорский В.П., Петренко А.И.* Алгоритмы анализа электронных схем. – М.:Сов.радио, 1976. – 608 с.
8. *Фадеев Д.К., Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.:Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1960. – 656 с.
9. *Воеводин В.В.* Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. – М.:Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1966.– 248 с.
10. *Гловацкая А. П.* Методы и алгоритмы вычислительной математики. – М.: Радио и связь, 1999. – 408 с. – ISBN 5-256-01458-7.
11. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров.– М.: Высшая школа, 1994.– 544 с. – ISBN 5-06-000625-5.
12. *Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилук О.П., Костин В.И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. – Новосибирск: Наука, 1988. – 456 с. – ISBN 5-02-028593-5.
13. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. –К.: Наукова думка, 1986. –544 с.
14. *Калиткин Н. Н.* Численные методы.: Под редакцией А. А. Самарского – М.: Наука, 1978. – 512 с.
15. *Молчанов И.Н.* Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций.- Киев: Наукова думка, 1987.- 288 с.
16. *Боглаев Ю.П.* Вычислительная математика и программирование. - М.: Высшая школа,1990. –540 с. –ISBN 5-06-00623-9.
17. *Golub, Gene H., Van Loan, Charles F.* Matrix computations. – Baltimore: John Hopkins University Press. – 1996. – 694 p. – ISBN:0-8018-5414-8.
18. *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery* Numerical Recipes in C. The art of scientific Computing. – Second edition. – Cambridge University Press. –1992. – 997 p. – ISBN 0-521-43108-5.
19. *Икрамов Х. Д.* Несимметричная проблема собственных значений. – М.: Наука, 1991, с. 100.
20. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений: В 2 т. – М.: Физматиздат, 1962. – 640 с.
21. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 560 с.
22. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
23. *Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д.* Обчислювальні методи в задачах прикладної математики: Навч. посібник. –К.:Либідь, 1995. – 280 с.– ISBN 5-325-00486-7.
24. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – М.: Мир, 1982. – 296 с.

25. Положий Г.Н., Пахарева Н.А., Степаненко И.З., Бондаренко П.С., Великоиваненко И.М. Математический практикум.: Под редакцией Г.Н. Положего.– М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1960. – 512 с.
26. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1972. – 400 с.
27. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с. –ISBN 5-06-003982-X.
28. Васильков Ю. В., Василькова Н. Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании. – М.: Финансы и статистика, 1999. — 255 с.
29. Abramowitz M. and Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. – National Bureau of Standards Applied Mathematics, Series 55, Tenth printing, United States. Government Printing Office. Washington D.C., 1972. – 1062 p.
30. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения.- Киев: Наукова думка, 1988.- 344 с.
31. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Серия: Справочная математическая библиотека.: Под общей редакцией Л.А.Люстерника и А.Р.Янпольского.– М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1965. – 384 с.
32. Положий Г. Н. Уравнения математической физики.— М.: Высш.шк., 1964. — 560 с.
33. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Фinitные функции в физике и технике. — М.: Наука, 1971. – 408 с.
34. Методи обчислень: Практикум на ЕОМ: навч. посібник / В.Л.Бурківська, С.О.Войцехівський, І.П.Гаврилюк та ін. –К.: Вища шк. , 1995. — 303 с. – ISBN 5-11-004030-3.
35. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учебное пособие для вузов. — 5-е изд., стереотип. — М.: Наука, 1977. — 735 с.
36. Григорьев А.Д. Электродинамика и техника СВЧ. – М.: Высш. шк., 1990. – 335с.
37. Евдокимов А.Г. Минимизация функций. Харьков: Издательское объединение «Вища школа» , 1977. – 160 с.
38. Волков А. Е. Численные методы. – М.: Наука, 1982. – 248 с.
39. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по вычислительной математике. – М.: Высш. шк., 1990. – 308 с.
40. Крылов В. И., Бобков В. Б., Монастырный П. И. Вычислительные методы: В 2 т. – М.: Наука, 1977. – 339 с.
41. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ. – М.: Мир, 1977. – 293 с.
42. Турчак Л. И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 350 с.
43. Шуп Т. Е. Решение инженерных задач на ЭВМ. – М.: Мир, 1990. – 235 с.