Лабораторная работа № 10 (4 часа)

Численное решение задачи аппроксимации функции

<u>Цель работы</u>: получение практических навыков сведения нелинейных задач аппроксимации функций к линейным, построения алгоритма численного решения линейной задачи аппроксимации, программной реализации этого алгоритма на ЭВМ.

Краткие теоретические сведения

Пусть функция $y(x)$ задана таблицей:

x	x_1	x_2	…	x_n
$y(x)$	y_1	y_2	…	y_n

Предположим, что по имеющимся значениям необходимо найти сравнительно простую функцию, приближающую заданную функцию.

Пусть $f(x)$ – некоторая функция, приближающая функцию $y(x)$. Введем понятие невязки в точке x_i

$$r_i = y_i - f(x_i)$$

и вектора невязки

$$R = \left[r_1, \ldots, r_n \right]^{\mathrm{T}}.$$

Под задачей аппроксимации понимают нахождение такой функции $f(x)$, которая минимизирует норму вектора невязки $\|R\|$. Точки (x_i, y_i) называют узлами аппроксимации.

Задачи аппроксимации делят в зависимости от типа используемых норм. Так, минимизация эвклидовой нормы невязки

$$\|R\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i) \right)^2}$$

называют среднеквадратичным приближением, а нормы Чебышева

$$\|R\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |r_i| = \max_{i=\overline{1,n}} \left| y_i - f(x_i) \right|$$

– равномерным приближением.

При требовании $\min\|R\| = 0$ задача аппроксимации совпадает с задачей интерполяции (рис. 1).

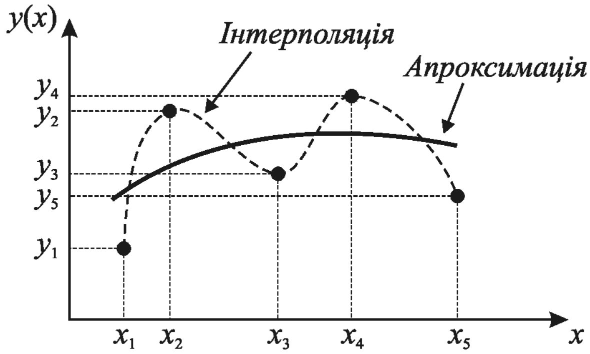

Рис. 1. Интерполяция и аппроксимация табличных зависимостей

Поскольку минимум нормы Эвклида совпадает с минимумом ее квадрата, то задачу о среднеквадратичном приближении формулируют так:

$$\min \|R\|_2^2 = \min \left[\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i) \right)^2 \right]. \qquad (1)$$

Аппроксимация функций путем решения (1) называют методом наименьших квадратов.

В общем случае, аппроксимирующую функцию строят в виде

$$f(x) = f(x,\ c_1, \ldots,\ c_m),$$

де c_i – параметры аппроксимации, подлежащие определению. Их находят из необходимого условия существования минимума нормы невязки:

$$\frac{\partial \|R\|}{\partial c_i} = 0, \qquad i = \overline{1,m}. \qquad (2)$$

Выражение (2) является системой из m уравнений относительно коэффициентов c_i. Если эта система линейная, то говорят о линейной задаче аппроксимации.

Задачу можно поставить таким образом, чтобы не все точки таблицы, которую аппроксимируют, являлись равноценными, например одни из них имеют меньшую погрешность либо являются более важными по определенному критерию. В таких случаях используют взвешенную норму, например, взвешенную норму Эвклида:

$$\min \left[\sum_{i=1}^{n} \rho(x) \left(y_i - f(x_i) \right)^2 \right],$$

где $\rho(x)$ – весовая функция, которая, в частности, может описывать степень достоверности либо важности отдельных точек.

В линейной задаче о среднеквадратичном приближении аппроксимирующую функцию строят в виде обобщенного полинома:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x),$$

где $\varphi_j(x)$ – система известных линейно независимых функций, которые называют базисными; c_j – коэффициенты, подлежащую определению. Коэффициенты выбирают такими, чтобы минимизировать выражение

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\rho(x_i)\, y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi(x_j)\right)^2. \qquad (3)$$

Из необходимого условия существования минимума (3) находим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma}{\partial c_1} &= 2\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\varphi_1(x_i)\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x_i)\right) = 0;\\
\frac{\partial\sigma}{\partial c_2} &= 2\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\varphi_2(x_i)\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x_i)\right) = 0;\\
&\dots\\
\frac{\partial\sigma}{\partial c_m} &= 2\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\varphi_m(x_i)\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x_i)\right) = 0.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Введем обозначения скалярных произведений:

$$\begin{aligned}
(\varphi_k,\, \varphi_j) &= \sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)\rho(x_i);\\
(\varphi_k,\, y) &= \sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i)\, y_i \rho(x_i).
\end{aligned} \qquad (5)$$

С учетом обозначений (5) необходимое условие существования минимума (4) примет вид:

$$\sum_{j=1}^{m} (\varphi_k,\, \varphi_j) c_j = (\varphi_k,\, y), \quad k = \overline{1,m}. \qquad (6)$$

Определитель системы (6)

$$\begin{vmatrix}
(\varphi_1,\, \varphi_1) & (\varphi_1,\, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\, \varphi_m)\\
(\varphi_2,\, \varphi_1) & (\varphi_2,\, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\, \varphi_m)\\
 & & \dots & \\
(\varphi_m,\, \varphi_1) & (\varphi_m,\, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_m,\, \varphi_m)
\end{vmatrix}$$

называется определителем Грама и равен нулю только при условии, что система функций $\varphi_j(x)$ является линейно зависимой. Поэтому если система функций $\varphi_j(x)$ является линейно независимой, определитель Грама не равен нулю и система (6) имеет единственное решение.

Матрица коэффициентов системы (6) симметрична и положительно определена, поэтому для ее решения целесообразно использовать метод $\mathbf{LL}^{\mathrm{T}}$-разложения.

Задача упрощается, если система базисных функций $\{\varphi_j(x)\}$ ортогональная. Тогда

$$\left(\varphi_k,\ \varphi_j\right)=0,\ k\neq j$$

и матрица системы (6) будет диагональной, а искомые коэффициенты можно определить как:

$$c_j=\frac{\left(\varphi_j,\ y\right)}{\left(\varphi_j,\ \varphi_j\right)}.$$

Многие нелинейные задачи аппроксимации могут быть сведены к линейным путем замены переменных и значений функции. При этом данные таблицы пересчитывают и представляют в виде удобном для линейной аппроксимации. Рассмотрим несколько примеров.

1. $f\left(x,c_1,c_2\right)=c_1e^{c_2x}$.

Прологарифмируем $f\left(x,c_1,c_2\right)$. Тогда

$$\ln f\left(x,c_1,c_2\right)=\ln c_1+c_2x$$

Обозначим:

$$\tilde{c}_1=\ln c_1.$$

В результате получим

$$\ln f\left(x,c_1,c_2\right)=\tilde{c}_1+c_2x.$$

Задача сведена к линейной.

Практически, для решения данной задачи аппроксимации, необходимо выполнить следующие шаги:

– прологарифмировать значения функции (y_i) исходной таблицы;

– по новой таблице найти параметры $\tilde{c}_1,c_2$;

– вычислить $c_1=e^{\tilde{c}_1}$.

2. $f\left(x,c_1,c_2\right)=c_1x^{c_2}$.

Прологарифмируем $f\left(x,c_1,c_2\right)$. В результате имеем

$$\ln f\left(x,c_1,c_2\right)=\ln c_1+c_2\ln x.$$

Введем замену переменных $\tilde{x}=\ln x$, а также новый параметр $\tilde{c}_1=\ln c_1$. Тогда

$$\ln f\left(x,c_1,c_2\right)=\tilde{c}_1+c_2\tilde{x}$$

Таким образом задача сведена к линейной. Для практической реализации решения задачи аппроксимации необходимо:

– прологарифмировать данные исходной таблицы;

– по новой таблице, решая линейную задачу аппроксимации, найти параметры $\tilde{c}_1,c_2$;

– вычислить $c_1=e^{\tilde{c}_1}$.

3. $f\left(x,c_1,c_2\right)=\dfrac{1}{c_1+c_2x}$.

Введем новую функцию

$$\frac{1}{f(x,c_1,c_2)} = c_1 + c_2 x$$

Задача сведена к линейной.

Фактически, необходимо только построить новую таблицу, в которой значения аргумента остаются неизменными, а значения функции заменены обратными к начальным и, используя новую таблицу, найти параметры c_1, c_2

4. $f(x,c_1,c_2) = \dfrac{x}{c_1 x + c_2}$.

Рассмотрим обратную функцию

$$\frac{1}{f(x,c_1,c_2)} = \frac{c_1 x + c_2}{x} = c_1 + \frac{c_2}{x}$$

Введем замену переменных $\tilde{x} = \dfrac{1}{x}$. Тогда

$$\frac{1}{f(x,c_1,c_2)} = c_1 + c_2 \tilde{x}$$

Таким образом для сведения данной нелинейной задачи к линейной достаточно заменить данные исходной таблицы обратными величинами.

Необходимо отметить, что в приведенных примерах задача была сведена к интерполяции линейной функцией, что является только частным случаем линейной задачи интерполяции. Однако приведенные примеры могут быть обобщены на случай, когда в качестве базисных функций используют не только функции $\varphi_1(x)=1$ и $\varphi_2(x)= x$ но и другие линейно независимые функции.

Следует отметить, что задачи аппроксимации часто используют для идентификации параметров моделей по экспериментальным измерениям. Обычно модель какого-то процесса представляется в виде уравнения, в которое входят константы подлежащие определению. Эти константы, как правило, имеют четкий физический смысл, и являются параметрами аппроксимации. Обычно число таких параметров не превышает двух, поскольку в противном случае трудно обеспечить устойчивость и однозначность получаемых решений.

В случае, когда аппроксимирующая функция имеет только два параметра аппроксимации, т.е.

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

система (6) может быть решена явным образом:

$$c_1 = \frac{(\varphi_1, y)(\varphi_2, \varphi_2) - (\varphi_2, y)(\varphi_1, \varphi_2)}{(\varphi_1, \varphi_1)(\varphi_2, \varphi_2) - (\varphi_1, \varphi_2)^2} \tag{7}$$

$$c_2 = \frac{-(\varphi_1, y)(\varphi_1, \varphi_2) + (\varphi_2, y)(\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)(\varphi_2, \varphi_2) - (\varphi_1, \varphi_2)^2}. \tag{8}$$

При аппроксимации линейной функцией ($\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)= x$) скалярные произведения в (7) и (8) рассчитываются по формулам:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = n$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$(\varphi_2,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$(\varphi_1,y)=\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$(\varphi_2,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Рабочее задание

1. Выбрать задачу в соответствии с вариантом. Свести нелинейную задачу аппроксимации к линейной.
2. Построить алгоритмы численного решения линейной задачи аппроксимации. Составить рабочую программу с использованием универсальной процедуры решения задачи аппроксимации полиномом степени n.
3. Провести решение задачи линейной аппроксимации (n=1) для функции, выбранной в соответствии с вариантом. По найденным параметрам аппроксимации построить график аппроксимирующей функции. Нанести на график узлы аппроксимации.

Содержание отчета

1. Название работы
2. Цель
3. Рабочее задание
4. Аппроксимирующая функция и результат сведения исходной задачи к линейной задаче аппроксимации.
5. Математические формулировки алгоритма решения линейной задачи аппроксимации.
6. Текст рабочей программы.
7. Результаты расчетов и график аппроксимирующей функции с нанесенными узлами аппроксимации.
8. Выводы.

Задачи

1. Зависимость барьерной емкости диода от обратного напряжения на диоде описывается уравнением:

$$C = \frac{C_0}{\left(1+\frac{U}{\varphi_0}\right)^n},$$

где C_0 – барьерная емкость при нулевом напряжении, φ_0 – высота потенциального барьера p-n перехода, *n* – коэффициент распределения примесей в p-n переходе. По измеренным вольт-фарадным характеристикам барьерной емкости найти высоту потенциального барьера p-n перехода (φ_0) и коэффициент распределения примесей в p-n переходе (*n*) для данного диода. Марку диода выбрать согласно варианту:

№ варианта	Марка диода
1	Д7
2	КД102
3	Д208
4	Д210
5	Д211
6	МД217
7	МД218
8	Д226

Вольт-фарадная характеристика диода Д7

U,В	0	0.5	1.	3.	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	53.0	38.0	31.0	20.5	17.0	15.0	13.8	12.7	11.4	10.0	9.1	8.3	7.6

Вольт-фарадная характеристика диода КД102

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	13.1	10.7	9.4	7.1	6.8	6.1	5.6	5.2	4.6	4.4	4.0	3.7	3.5

Вольт-фарадная характеристика диода Д208

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	9.4	7.7	6.8	5.0	4.4	4.1	3.8	3.5	3.2	2.9	2.7	2.4	2.3

Вольт-фарадная характеристика диода Д210

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	13.5	11.0	10.5	7.6	6.6	6.2	5.8	5.2	4.8	4.4	4.1	3.8	3.5

Вольт-фарадная характеристика диода Д211

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	13.6	11.5	10.5	8.4	7.3	6.7	6.2	5.7	5.3	4.8	4.5	4.3	4.1

Вольт-фарадная характеристика диода МД217

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	15.5	14.0	12.2	10.5	9.7	9.0	8.6	8.1	7.6	7.1	6.7	6.4	6.1

Вольт-фарадная характеристика диода МД218

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	24.6	21.0	19.0	15.0	13.5	12.5	11.7	10.9	10.2	9.4	8.8	8.2	7.8

Вольт-фарадная характеристика диода Д226

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	11.3	9.7	8.7	6.8	6.0	5.7	5.3	4.9	4.6	4.2	3.9	3.6	3.4

2. Зависимость тока диода от напряжения описывается уравнением:

$$I = I_0 \left(\exp\left(\frac{U}{m\varphi_T} \right) - 1 \right),$$

где I_0 — обратный ток диода, φ_T — тепловой потенциал, равный при комнатной температуре 26мВ, m — коэффициент неидеальности диода. По измеренным вольт-амперным характеристикам найти обратный ток диода (I_0) и коэффициент неидеальности диода (m) для данного диода. Марку диода выбрать согласно варианту:

№ варианта	Диод
1	VD1
2	VD2
3	VD3
4	VD4
5	VD5
6	VD6
7	VD7
8	VD8

Вольт-амперная характеристика диода VD1

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$8.6\cdot10^{-7}$	$8.9\cdot10^{-5}$	$8.5\cdot10^{-4}$	$2.6\cdot10^{-3}$	$8.2\cdot10^{-3}$	0.025	0.078	0.24	0.76	2.34	7.25	22.4	69.7

Вольт-амперная характеристика диода VD2

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$6.6\cdot10^{-6}$	$4.3\cdot10^{-4}$	$3.3\cdot10^{-3}$	$9.0\cdot10^{-3}$	0.025	0.068	0.19	0.52	1.43	3.92	10.8	29.7	81.7

Вольт-амперная характеристика диода VD3

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$3.7\cdot10^{-6}$	$3.0\cdot10^{-4}$	$2.5\cdot10^{-3}$	$7.5\cdot10^{-3}$	0.022	0.064	0.18	0.54	1.57	4.56	13.3	38.6	112

Вольт-амперная характеристика диода VD4

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$5.8\cdot10^{-5}$	$3.2\cdot10^{-3}$	0.022	0.057	0.15	0.39	1.03	2.68	7.02	18.4	48.0	126	329

Вольт-амперная характеристика диода VD5

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$1.2\cdot10^{-7}$	$2.2\cdot10^{-5}$	$2.8\cdot10^{-4}$	$1.0\cdot10^{-3}$	$3.7\cdot10^{-3}$	0.013	0.048	0.173	0.624	2.25	8.10	29.2	105

Вольт-амперная характеристика диода VD6

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$5.0\cdot10^{-7}$	$6.8\cdot10^{-5}$	$7.5\cdot10^{-4}$	$2.5\cdot10^{-3}$	$8.3\cdot10^{-3}$	0.028	0.092	0.305	1.02	3.38	11.2	37.4	124

Вольт-амперная характеристика диода VD7

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$2.9\cdot10^{-8}$	$7.6\cdot10^{-6}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$4.7\cdot10^{-4}$	$1.8\cdot10^{-3}$	$7.3\cdot10^{-3}$	0.029	0.114	0.450	1.78	7.01	27.7	109

Вольт-амперная характеристика диода VD8

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$1.8\cdot10^{-8}$	$7.2\cdot10^{-6}$	$1.4\cdot10^{-4}$	$6.1\cdot10^{-4}$	$2.7\cdot10^{-3}$	0.012	0.051	0.225	0.987	4.33	19.0	83.5	366

Варианты заданий

Номер бригады	Номер задачи	Номер варианта задачи
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
5	1	5
6	1	6
7	1	7
8	1	8
9	2	1
10	2	2
11	2	3
12	2	4
13	2	5
14	2	6
15	2	7
16	2	8