Лабораторна робота № 10 (4 години)

Чисельне розв’язання задачі апроксимації функції

Мета роботи: отримання практичних навичок зведення нелінійних задач апроксимації функцій до лінійних, побудови алгоритму чисельного розв'язання лінійної задачі апроксимації, програмної реалізації цього алгоритму на ЕОМ.

Короткі теоретичні відомості

Нехай функція $y(x)$ задана таблицею:

x	x_1	x_2	…	x_n
$y(x)$	y_1	y_2	…	y_n

Припустимо, що за існуючими значеннями необхідно знайти порівняно просту функцію, що наближає задану функцію.

Нехай $f(x)$ – деяка функція, що наближає функцію $y(x)$. Введемо поняття нев’язки в точці x_i :

$$r_i = y_i - f(x_i)$$

і вектора нев’язки:

$$R = \left[r_1, \ldots, r_n\right]^{\mathrm{T}}.$$

Під задачею апроксимації розуміють знаходження такої функції $f(x)$, яка мінімізує норму вектора нев’язки $\|R\|$. Точки (x_i, y_i) називають вузлами апроксимації.

Задачі апроксимації поділяють в залежності від типу використаних норм. Так, мінімізація евклідової норми нев’язки

$$\|R\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f\left(x_i\right)\right)^2}$$

називають середньоквадратичним наближенням, а норми Чебишева

$$\|R\|_\infty = \max_{i=1,n} |r_i| = \max_{i=1,n} \left|y_i - f\left(x_i\right)\right|$$

– рівномірним наближенням.

При вимозі $\min\|R\| = 0$ задача апроксимації співпадає із задачею інтерполяції (рис. 1).

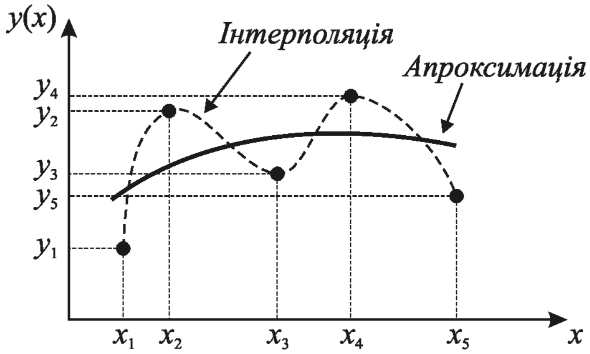

Рис. 1. Інтерполяція і апроксимація табличних залежностей

Оскільки мінімум норми Евкліда співпадає з мінімумом її квадрату, то задачу про середньоквадратичне наближення формулюють так:

$$\min\|R\|_2^2 = \min\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f\left(x_i\right)\right)^2\right]. \qquad (1)$$

Апроксимацію функцій шляхом розв'язання задачі (1) називають методом найменших квадратів.

В загальному випадку, апроксимуючу функцію будують у вигляді

$$f\left(x\right) = f\left(x,\ c_1,\ldots,\ c_m\right),$$

де c_i – параметри апроксимації, що підлягають визначенню. Їх знаходять із необхідної умови існування мінімуму норми нев’язки:

$$\frac{\partial\|R\|}{\partial c_i} = 0, \qquad i = \overline{1,m}. \qquad (2)$$

Вираз (2) є системою із m рівнянь відносно коефіцієнтів c_i. Якщо ця система лінійна, то говорять про лінійну задачу апроксимації.

Задачу можна поставити таким чином, щоб не всі точки таблиці, яку апроксимують, були рівноцінними, наприклад одні з них мають меншу похибку або є більш важливими по визначеному критерію. В таких випадках використовують зважену норму, наприклад, зважену норму Евкліда:

$$\min\left[\sum_{i=1}^{n}\rho\left(x\right)\left(y_i - f\left(x_i\right)\right)^2\right],$$

де $\rho(x)$ – вагова функція, яка, зокрема, може описувати ступінь достовірності або важливості окремих точок.

В лінійній задачі про середньоквадратичне наближення апроксимуючу функцію будують у вигляді узагальненого полінома:

$$f\left(x\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j\left(x\right),$$

де $\varphi_j(x)$ – система відомих лінійно незалежних функцій, які називають базисними; c_j – коефіцієнти, які підлягають визначенню. Коефіцієнти вибирають такими, щоб мінімізувати вираз

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi(x_j)\right)^2 . \qquad (3)$$

Із необхідної умови існування мінімуму (3) знаходимо:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma}{\partial c_1} = 2\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\varphi_1(x_i)\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x_i)\right) = 0; \\
\frac{\partial \sigma}{\partial c_2} = 2\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\varphi_2(x_i)\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x_i)\right) = 0; \\
\dots \\
\frac{\partial \sigma}{\partial c_m} = 2\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\varphi_m(x_i)\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x_i)\right) = 0.
\end{gathered} \qquad (4)$$

Введемо позначення скалярних добутків:

$$\begin{gathered}
(\varphi_k,\, \varphi_j) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)\rho(x_i); \\
(\varphi_k,\, y) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i) y_i \rho(x_i).
\end{gathered} \qquad (5)$$

Із врахуванням позначень (5) необхідна умова існування мінімуму (4) набуде вигляду:

$$\sum_{j=1}^{m} (\varphi_k,\, \varphi_j) c_j = (\varphi_k,\, y), \quad k = \overline{1,m}. \qquad (6)$$

Визначник системи (6)

$$\begin{vmatrix}
(\varphi_1,\, \varphi_1) & (\varphi_1,\, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\, \varphi_m) \\
(\varphi_2,\, \varphi_1) & (\varphi_2,\, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\, \varphi_m) \\
 & & \dots & \\
(\varphi_m,\, \varphi_1) & (\varphi_m,\, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_m,\, \varphi_m)
\end{vmatrix}$$

називається визначником Грама і дорівнює нулю тільки за умови, що система функцій $\varphi_j(x)$ є лінійно залежною. Тому якщо система функцій $\varphi_j(x)$ є лінійно незалежною, визначник Грама не дорівнює нулю і система (6) має єдиний розв'язок.

Матриця коефіцієнтів системи (6) симетрична і додатно визначена, тому для її розв'язання доцільно використовувати метод $\mathbf{LL}^{\mathrm{T}}$-фкторизації.

Задача спрощується, якщо система базисних функцій $\{\varphi_j(x)\}$ ортогональна. Тоді

$$\left(\varphi_k,\ \varphi_j\right)=0,\ k\neq j$$

і матриця системи (6) буде діагональною, а шукані коефіцієнти можна визначити як:

$$c_j=\frac{\left(\varphi_j,\ y\right)}{\left(\varphi_j,\ \varphi_j\right)}.$$

Багато нелінійних задач апроксимації можуть бути зведені до лінійних шляхом заміни змінних і значень функції. При цьому дані таблиці перераховують і подають у вигляді, зручному для лінійної апроксимації. Розглянемо декілька прикладів.

1. $f\left(x,c_1,c_2\right)=c_1e^{c_2x}$.

Прологарифмуємо $f\left(x,c_1,c_2\right)$. Тоді

$$\ln f\left(x,c_1,c_2\right)=\ln c_1+c_2x$$

Позначимо:

$$\tilde{c}_1=\ln c_1.$$

В результаті отримаємо:

$$\ln f\left(x,c_1,c_2\right)=\tilde{c}_1+c_2x.$$

Задача зведена до лінійної.

Практично, для розв’язання даної задачі апроксимації, необхідно виконати наступні кроки:

– прологарифмувати значення функції y_i вихідної таблиці;

– по новій таблиці знайти параметри $\tilde{c}_1,c_2$;

– вирахувати $c_1=e^{\tilde{c}_1}$.

2. $f\left(x,c_1,c_2\right)=c_1x^{c_2}$.

Прологарифмуємо $f\left(x,c_1,c_2\right)$. В результаті отримаємо:

$$\ln f\left(x,c_1,c_2\right)=\ln c_1+c_2\ln x.$$

Введемо заміну змінних $\tilde{x}=\ln x$, а також новий параметр $\tilde{c}_1=\ln c_1$. Тоді

$$\ln f\left(x,c_1,c_2\right)=\tilde{c}_1+c_2\tilde{x}$$

Таким чином, задача зведена до лінійної. Для практичної реалізації розв’язання задачі апроксимації необхідно:

– прологарифмувати дані вихідної таблиці;

– по новій таблиці, розв’язуючи лінійну задачу апроксимації, знайти параметри $\tilde{c}_1,c_2$;

– вичислити $c_1=e^{\tilde{c}_1}$.

3. $f\left(x,c_1,c_2\right)=\dfrac{1}{c_1+c_2x}$.

Введемо нову функцію:

$$\frac{1}{f\left(x,c_1,c_2\right)}=c_1+c_2x.$$

Задача зведена до лінійної.

Фактично, необхідно тільки побудувати нову таблицю, в якій значення аргумента залишаються незмінними, а значення функції замінені оберненими до початкових і, використовуючи нову таблицю, знайти параметри c_1, c_2

4. $f(x, c_1, c_2) = \dfrac{x}{c_1 x + c_2}$.

Розглянемо обернену функцію:

$$\frac{1}{f(x, c_1, c_2)} = \frac{c_1 x + c_2}{x} = c_1 + \frac{c_2}{x}.$$

Введемо заміну змінних $\tilde{x} = \dfrac{1}{x}$. Тоді

$$\frac{1}{f(x, c_1, c_2)} = c_1 + c_2 \tilde{x}.$$

Таким чином, для зведення даної нелінійної задачі до лінійної достатньо замінити дані вихідної таблиці оберненими величинами.

Слід відмітити, що в наведених прикладах задача була зведена до інтерполяції лінійною функцією, що є тільки окремим випадком лінійної задачі інтерполяції. Однак наведені приклади можуть бути узагальнені на випадок, коли в якості базисних функцій використовують не тільки функції $\varphi_1(x)=1$ і $\varphi_2(x)= x$, але і інші лінійно незалежні функції.

Слід відмітити, що задачі апроксимації часто використовують для ідентифікації параметрів моделей за експериментальними вимірюваннями. Зазвичай модель якогось процесу подається у вигляді рівняння, в яке входять константи, що підлягають визначенню. Ці константи, як правило, мають чіткий фізичний сенс, і є параметрами апроксимації. Зазвичай число таких параметрів не перевищує двох, оскільки інакше важко забезпечити стійкість і однозначність отриманих розв'язків.

У випадку, коли апроксимуюча функція має тільки два параметри апроксимації, тобто:

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x),$$

система (6) може бути розв'язана явним чином:

$$c_1 = \frac{(\varphi_1, y)(\varphi_2, \varphi_2) - (\varphi_2, y)(\varphi_1, \varphi_2)}{(\varphi_1, \varphi_1)(\varphi_2, \varphi_2) - (\varphi_1, \varphi_2)^2}; \quad (7)$$

$$c_2 = \frac{-(\varphi_1, y)(\varphi_1, \varphi_2) + (\varphi_2, y)(\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)(\varphi_2, \varphi_2) - (\varphi_1, \varphi_2)^2}. \quad (8)$$

При апроксимації лінійної функції ($\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)= x$) скалярні добутки в (7) і (8) розраховуються за формулами:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = n;$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

$$(\varphi_2, \varphi_2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2;$$

$$\left(\varphi_1, y\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i \ ;$$

$$\left(\varphi_2, y\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

Робоче завдання

1. Вибрати задачу відповідно до варіанту. Звести нелінійну задачу апроксимації до лінійної.
2. Побудувати алгоритми чисельного розв’язання лінійної задачі апроксимації. Скласти робочу програму із використанням універсальної процедури розв’язання задачі апроксимації поліномом степеня *n*.
3. Провести розв’язання задачі лінійної апроксимації (*n*=1) для функції, вибраної відповідно до варіанта. За знайденими параметрами апроксимації побудувати графік апроксимуючої функції. Нанести на графік вузли апроксимації.

Зміст звіту

1. Назва роботи
2. Мета
3. Робоче завдання
4. Апроксимуюча функція і результат зведення вихідної задачі до лінійної задачі апроксимації.
5. Математичні формулювання алгоритму розв’язання лінійної задачі апроксимації.
6. Текст робочої програми.
7. Результати розрахунків і графік апроксимуючої функції із нанесеними вузлами апроксимації.
8. Висновки.

Задачі

1. Залежність бар’єрної ємності діода від зворотньої напруги на діоді описується рівнянням:

$$C = \frac{C_0}{\left(1 + \frac{U}{\varphi_0}\right)^n} \ ,$$

де C_0 – бар’єрна ємність при нульовій напрузі, φ_0 – висота потенціального бар’єра p-n переходу, *n* – коефіцієнт розподілу домішок в p-n переході. За виміряними вольт-фарадними характеристикам бар’єрної ємності знайти висоту потенціального бар’єра p-n переходу (φ_0) і коефіцієнт розподілу домішок в p-n переході (n) для даного діода. Марку діода вибрати згідно варіанту:

№ варіанту	Марка діода
1	Д7
2	КД102
3	Д208
4	Д210
5	Д211
6	МД217
7	МД218
8	Д226

Вольт-фарадна характеристика діода Д7

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	53.0	38.0	31.0	20.5	17.0	15.0	13.8	12.7	11.4	10.0	9.1	8.3	7.6

Вольт-фарадна характеристика діода КД102

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	13.1	10.7	9.4	7.1	6.8	6.1	5.6	5.2	4.6	4.4	4.0	3.7	3.5

Вольт-фарадна характеристика діода Д208

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	9.4	7.7	6.8	5.0	4.4	4.1	3.8	3.5	3.2	2.9	2.7	2.4	2.3

Вольт-фарадна характеристика діода Д210

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	13.5	11.0	10.5	7.6	6.6	6.2	5.8	5.2	4.8	4.4	4.1	3.8	3.5

Вольт-фарадна характеристика діода Д211

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	13.6	11.5	10.5	8.4	7.3	6.7	6.2	5.7	5.3	4.8	4.5	4.3	4.1

Вольт-фарадна характеристика діода МД217

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	15.5	14.0	12.2	10.5	9.7	9.0	8.6	8.1	7.6	7.1	6.7	6.4	6.1

Вольт-фарадна характеристика діода МД218

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	24.6	21.0	19.0	15.0	13.5	12.5	11.7	10.9	10.2	9.4	8.8	8.2	7.8

Вольт-фарадна характеристика діода Д226

U,В	0	0.5	1	3	4.5	6	7.5	9.5	12	16	20	25	30
С,пФ	11.3	9.7	8.7	6.8	6.0	5.7	5.3	4.9	4.6	4.2	3.9	3.6	3.4

2. Залежність струму діоду від напруги описується рівнянням:

$$I = I_0\left(\exp\left(\frac{U}{m\varphi_T}\right) - 1\right),$$

де I_0 — зворотній струм діода, φ_T — тепловий потенціал, який при кімнатній температурі дорівнює 26мВ, m — коефіцієнт неідеальності діода. За виміряними вольт-амперними характеристиками знайти зворотний струм діода (I_0) і коефіцієнт неідеальності діода (m) для даного діода. Марку діода вибрати згідно варіанту:

№ варіанту	Діод
1	VD1
2	VD2
3	VD3
4	VD4
5	VD5
6	VD6
7	VD7
8	VD8

Вольт-амперна характеристика діоду VD1

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$8.6\cdot10^{-7}$	$8.9\cdot10^{-5}$	$8.5\cdot10^{-4}$	$2.6\cdot10^{-3}$	$8.2\cdot10^{-3}$	0.025	0.078	0.24	0.76	2.34	7.25	22.4	69.7

Вольт-амперна характеристика діоду VD2

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$6.6\cdot10^{-6}$	$4.3\cdot10^{-4}$	$3.3\cdot10^{-3}$	$9.0\cdot10^{-3}$	0.025	0.068	0.19	0.52	1.43	3.92	10.8	29.7	81.7

Вольт-амперна характеристика діоду VD3

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$3.7\cdot10^{-6}$	$3.0\cdot10^{-4}$	$2.5\cdot10^{-3}$	$7.5\cdot10^{-3}$	0.022	0.064	0.18	0.54	1.57	4.56	13.3	38.6	112

Вольт-амперна характеристика діоду VD4

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$5.8\cdot10^{-5}$	$3.2\cdot10^{-3}$	0.022	0.057	0.15	0.39	1.03	2.68	7.02	18.4	48.0	126	329

Вольт-амперна характеристика діоду VD5

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$1.2\cdot10^{-7}$	$2.2\cdot10^{-5}$	$2.8\cdot10^{-4}$	$1.0\cdot10^{-3}$	$3.7\cdot10^{-3}$	0.013	0.048	0.173	0.624	2.25	8.10	29.2	105

Вольт-амперна характеристика діоду VD6

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$5.0\cdot10^{-7}$	$6.8\cdot10^{-5}$	$7.5\cdot10^{-4}$	$2.5\cdot10^{-3}$	$8.3\cdot10^{-3}$	0.028	0.092	0.305	1.02	3.38	11.2	37.4	124

Вольт-амперна характеристика діоду VD7

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$2.9\cdot10^{-8}$	$7.6\cdot10^{-6}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$4.7\cdot10^{-4}$	$1.8\cdot10^{-3}$	$7.3\cdot10^{-3}$	0.029	0.114	0.450	1.78	7.01	27.7	109

Вольт-амперна характеристика діоду VD8

U,мВ	100	300	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
I,мА	$1.8\cdot10^{-8}$	$7.2\cdot10^{-6}$	$1.4\cdot10^{-4}$	$6.1\cdot10^{-4}$	$2.7\cdot10^{-3}$	0.012	0.051	0.225	0.987	4.33	19.0	83.5	366

Варіанти завдань

Номер бригади	Номер задачі	Номер варіанту задачі
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
5	1	5
6	1	6
7	1	7
8	1	8
9	2	1
10	2	2
11	2	3
12	2	4
13	2	5
14	2	6
15	2	7
16	2	8