

Лабораторная работа № 6 (4 часа)

Численное интегрирование функций

Цель работы: получение практических навыков построения алгоритмов интегрирования функций, программной реализации их на компьютере, оценки погрешности решения, сравнение эффективности квадратурных формул различных порядков.

Краткие теоретические сведения

Задача численного интегрирования состоит в нахождении приближенного значения интеграла:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

где $f(x)$ — заданная функция. Для решения этой задачи отрезок $[a, b]$ обычно разбивается на n элементарных отрезков точками $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$ и искомое значение интеграла заменяется суммой:

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx. \quad (1)$$

На каждом элементарном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ вводится сетка $x_i = \xi_{i0} < \xi_{i1} < \dots < \xi_{im} = x_{i+1}$ в качестве приближенного значения интеграла рассматривается число:

$$I_i = h_i \sum_{j=0}^m C_j f(\xi_{ij}), \quad (2)$$

где $f(\xi_{ij})$ — значения функции $f(x)$ в узлах $x = \xi_{ij}$, C_j — весовые множители (веса), зависящие только от узлов, но не зависящие от выбора $f(x)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Для численного приближения определенных интегралов часто используется термин квадратура, чтобы избежать путаницы с численным интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому формулу (2) называют квадратурной формулой. Число m называют порядком квадратурной формулы. Точки ξ_{ij} называют узлами, а числа C_j коэффициентами квадратурной формулы.

Если погрешность квадратурной формулы на элементарном отрезке можно оценить как:

$$R_i = a_i f^{(p)}(\Theta) h_i^{p+1},$$

где a_i — константа, $\Theta \in [x_i, x_{i+1}]$, то число p называют порядком точности метода на всем отрезке интегрирования.

Поскольку квадратурная формула (2) должна быть справедлива для любой функции, в том числе и для функции $f(x) \equiv 1$, то из (2) следует:

$$\sum_{j=0}^m C_j = 1. \quad (3)$$

Наиболее часто используются квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Это семейство формул, получаемых интегрированием интерполяционных полиномов, построенных по равноудаленным узлам.

Различают два типа формул Ньютона-Котеса: формулы замкнутого типа и формулы открытого типа. В формулах замкнутого типа интерполяционный полином проходит через крайние точки отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, а в формулах открытого типа хотя бы одна из точек x_i или x_{i+1} не является узлом интерполяционного полинома. Так,

например, формулы трапеции и Симпсона являются формулами Ньютона-Котеса замкнутого типа, а формула прямоугольника — открытого типа.

В формулах Ньютона-Котеса m -го порядка закрытого типа весовые коэффициенты рассчитываются по формуле:

$$C_j = \frac{(-1)^{m-j}}{j!(m-j)!} \frac{1}{m} \int_0^m \prod_{k=0, k \neq j}^m (t-k) dt. \quad (4)$$

Из (4) следует, что

$$C_j = C_{m-j}, \quad (5)$$

т.е. коэффициенты Котеса симметричны относительно центра элементарного отрезка.

Погрешность формулы Ньютона-Котеса может быть оценена как:

$$R_i = \begin{cases} a_i f^{(m+2)}(\xi_i) h_i^{m+3}, & m = 2l \\ a_i f^{(m+1)}(\xi_i) h_i^{m+2}, & m = 2l - 1 \end{cases}, l = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

Из оценки (6) следует, что для уменьшения погрешности квадратурной формулы Ньютона-Котеса необходимо увеличивать ее порядок. Однако формулы с $m \geq 10$ редко используются из-за их численной неустойчивости, приводящей к резкому возрастанию вычислительной погрешности. Причиной такой неустойчивости является то, что коэффициенты C_j при больших m имеют различные знаки. Некоторые коэффициенты становятся отрицательными при $m=8$. Для $m=9$ они все положительны, но для $m \geq 10$ существуют как положительные, так и отрицательные значения.

Поскольку вычислительная погрешность вычисления интеграла равна:

$$\Delta I = \sum_{j=0}^m C_j \Delta f_{i,j},$$

то

$$|\Delta I| \leq \sum_{j=0}^m |C_j| |\Delta f_{i,j}|.$$

Если все C_j положительны, то в соответствии с (3) $\sum_{j=0}^m |C_j| = 1$. Тогда,

$$|\Delta I| \leq \sum_{j=0}^m |C_j| |\Delta f_{i,j}| \leq \max_{0 \leq j \leq m} |\Delta f_{i,j}| \sum_{j=0}^m |C_j| = \max_{0 \leq j \leq m} |\Delta f_{i,j}|.$$

Следовательно, погрешность вычисления квадратуры имеет тот же порядок, что и погрешность вычисления функции. В этом случае говорят, что сумма (2) вычисляется устойчиво. Если C_j имеют различные знаки, то может оказаться, что сумма $\sum_{j=0}^m |C_j|$ может возрастать с ростом m , следовательно, возрастает погрешность вычисления квадратуры.

Коэффициенты и остаточные члены формул Ньютона-Котеса первых 10-ти порядков приведены в таблице 1. При этом коэффициенты Котеса рассчитываются по формуле:

$$C_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{i=0}^m \alpha_i}. \quad (7)$$

Для определения недостающих коэффициентов необходимо воспользоваться свойством (5).

Для уменьшения вычислительных погрешностей желательно избежать непосредственного вычисления коэффициентов Котеса по формуле (7), а целесообразно переписать выражение (2) в виде:

$$I_i = \frac{h_i}{\sum_{i=0}^m \alpha_i} \sum_{j=0}^m \alpha_j f(\xi_{ij}),$$

причем деление на $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ можно провести только при возвращении значения вычисленной квадратуры. Следует отметить, что поскольку все α_i являются целыми числами, то для их хранения следует использовать только целые типы. Это позволит уменьшить накапливаемую погрешность округления.

Для оценки достигнутой погрешности можно воспользоваться правилом Рунге. Для этого вычисление квадратуры необходимо провести дважды с шагами h и $\frac{h}{2}$. При этом оценка достигнутой относительной погрешности может быть вычислена по формуле

$$R = \frac{1}{(2^p - 1)} \left| \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{I_{\frac{h}{2}}} \right|, \quad (8)$$

где $I_{\frac{h}{2}}, I_h$ — вычисленные значения интегралов с шагом $\frac{h}{2}$ и h , p — порядок точности метода на всем отрезке интегрирования.

Если достигнутая погрешность R окажется больше заданной ε , то шаг интегрирования необходимо уменьшить (например, вдвое) и снова оценить погрешность. Измельчение шага следует проводить до тех пор, пока не выполнится условие $R < \varepsilon$.

Таблица 1. Постоянные для расчета коэффициентов Котеса и погрешность формулы Ньютона-Котеса порядка m на элементарном отрезке

m	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\sum_{i=0}^m \alpha_i$	R_i
1	1	1					2	$-\frac{1}{12} h_i^3 f''(\xi)$
2	1	4	1				6	$-\frac{1}{90 \cdot 2^5} h_i^5 f^{IV}(\xi)$
3	1	3	3	1			8	$-\frac{3}{80 \cdot 3^5} h_i^5 f^{IV}(\xi)$
4	7	32	12	32	7		90	$-\frac{8}{945 \cdot 4^7} h_i^7 f^{VI}(\xi)$
5	19	75	50	50	75	19	288	$-\frac{275}{12096 \cdot 5^7} h_i^7 f^{VI}(\xi)$
6	41	216	27	272	27	216	840	$-\frac{9}{1400 \cdot 6^9} h_i^9 f^{VIII}(\xi)$
7	751	3577	1323	2989	2989	1323	17280	$-\frac{8183}{518400 \cdot 7^9} h_i^9 f^{VIII}(\xi)$
8	989	5888	-928	10496	-4540	10496	28350	$\sim h_i^{11} f^X(\xi)$
9	2857	15741	1080	19344	5778	5778	89600	$\sim h_i^{11} f^X(\xi)$
10	16067	106300	-48525	272400	-260550	427368	598752	$\sim h_i^{13} f^{XII}(\xi)$

Разрыв страницы

Рабочее задание

1. Построить алгоритмы численного интегрирования функций с использованием квадратурных формул Ньютона-Котеса 4, 5 и 8 порядков с автоматическим выбором шага интегрирования для достижения результата с заданной относительной погрешностью ε .

2. Составить рабочую программу с использованием универсальных функций для численного интегрирования. Формальные параметры функций интегрирования должны содержать имя подынтегральной функции, границы отрезка интегрирования, относительную погрешность вычисления интеграла. Следует предусмотреть возможность ограничения максимального числа элементарных отрезков или минимальной длины элементарного отрезка.

3. Набрать и отладить программу на компьютере. Отладку осуществить с использованием в качестве подынтегральной функции полиномов степени $p-1$, где p — порядок точности метода на всем отрезке интегрирования.

4. Провести вычисление интегралов от функций, заданных в табл. 2, с подсчетом числа элементарных отрезков и требуемого числа обращений к подынтегральной функции, необходимых для достижения заданной погрешности.

5. С помощью интеграла суперпозиции:

$$y(t) = V(0)h(t) + \int_{0+}^t V'(\tau)h(t-\tau)d\tau - V(\tau_{p-})h(t-\tau_{p-}),$$

определить реакцию системы, показанной на рис. 1, на сигнал:

- $V(t) = \begin{cases} A \cdot \sin(\omega t + \varphi), & t \in [0; \tau_{p-}] \\ 0, & t \notin [0; \tau_{p-}] \end{cases}, \tau_{p-} = \frac{\pi}{\omega}, t_{\max} > 2\tau_{p-};$
- $V(t) = A \cdot e^{-\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}, \tau_{p-} = \infty, t_{\max} > t_0 + 3\sigma;$
- приведенный на рис. 2, $\tau_{p-} = 3, t_{\max} > 4,$

и построить соответствующие графики на отрезке $t \in [0, t_{\max}]$ в одной системе координат с $V(t)$.

Здесь:

$h(t)$ — переходная характеристика схемы. Ее следует определить аналитически по методике, изложенной в курсе теории цепей;

$V(t)$ — входное воздействие.

Все сопротивления даны в Омах, токи — в Амперах, емкости — в Фарадах, индуктивности — в Генри, круговые частоты — в рад/с, фазы — в радианах, время — в секундах.

6. Сравнить методы различных порядков по эффективности.

Содержание отчета

1. Название работы.
2. Цель.
3. Рабочее задание.
4. Математические формулировки алгоритмов численного интегрирования.
5. Текст рабочей программы.

6. Результаты расчетов с подсчетом числа необходимых разбиений заданного отрезка на элементарные и количества вызовов подынтегральной функции.
7. Графики полученных зависимостей (входной и выходной сигнал в одной системе координат).
8. Выводы.

Варианты заданий

Таблица 2

Номер бригады	Подынтегральная функция	Пределы интегрирования		Относительная погрешность ε	№ схемы/ № сигнала	A	ω, φ	t_0, σ
		a	b					
1	$\frac{\sin x^2}{x^2}$	0	3π	10^{-6}	1/1	1	2π $\pi/6$	4 1
2	$\frac{e^{\sin x}}{1 + \cos x}$	$-\pi/2$	$\pi/2$	10^{-6}	1/2	1	2π $\pi/4$	5 1
3	$\frac{\ln(2 - \sin x)}{0.1 + \operatorname{tg}^2 x}$	0	$\frac{\pi}{2.5}$	10^{-6}	1/3	1	2π $\pi/3$	6 1
4	$\frac{\sin x^2}{1 - \cos x}$	0	π	10^{-6}	1/4	1	2π $\pi/2$	7 1
5	$\frac{\cos x^3}{1.1 - \sin x^2}$	0	1	10^{-6}	2/1	2	2π $-\pi/6$	7 2
6	$\frac{e^{\sqrt{x}}}{3 - \sin x}$	0	5π	10^{-6}	2/2	2	2π $-\pi/4$	8 1
7	$\frac{1 - \cos x^2}{\sin \sqrt{x}}$	0	π	10^{-5}	2/3	2	2π $-\pi/3$	8 2
8	$\frac{\sin x^2}{\sqrt[3]{1 - \cos \sqrt{x}}}$	0	2π	10^{-5}	2/4	2	2π $-\pi/2$	9 1
9	$\frac{1 - \cos x^3}{\sin \ln(1 + x)}$	0	1	10^{-6}	3/1	3	3π $\pi/6$	9 2
10	$\frac{\sin x^4}{1 - \cos \ln(1 + x)}$	0	1	10^{-6}	3/2	3	3π $\pi/4$	9 3
11	$\frac{1 - \cos x}{x^2}$	0	6π	10^{-6}	3/3	3	3π $\pi/3$	10 1
12	$(1 + x)e^{-x^2}$	0	4	10^{-6}	3/4	3	3π $\pi/2$	10 2
13	$\frac{e^{\cos x}}{1 + \sin x}$	0	1.1π	10^{-6}	4/1	4	3π $-\pi/6$	2 1
14	$\frac{\sin x^2}{2 - \cos x}$	0	π	10^{-6}	4/2	4	3π $-\pi/4$	10 3
15	$\frac{1 - \cos x}{x}$	0	6π	10^{-6}	4/3	4	3π $-\pi/3$	11 2
16	$\frac{\sin^2 x}{x^2}$	0	6π	10^{-6}	4/4	4	3π $-\pi/2$	11 2

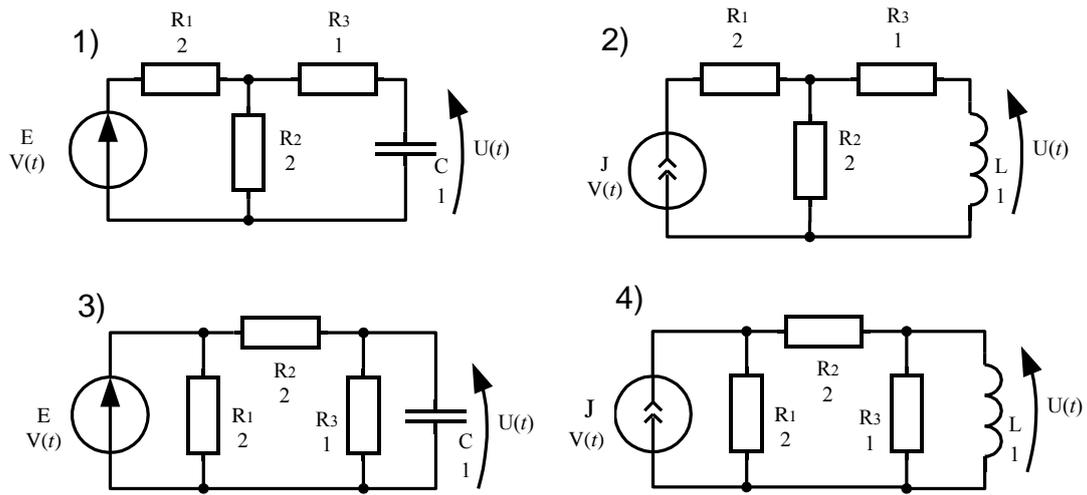


Рис. 1.

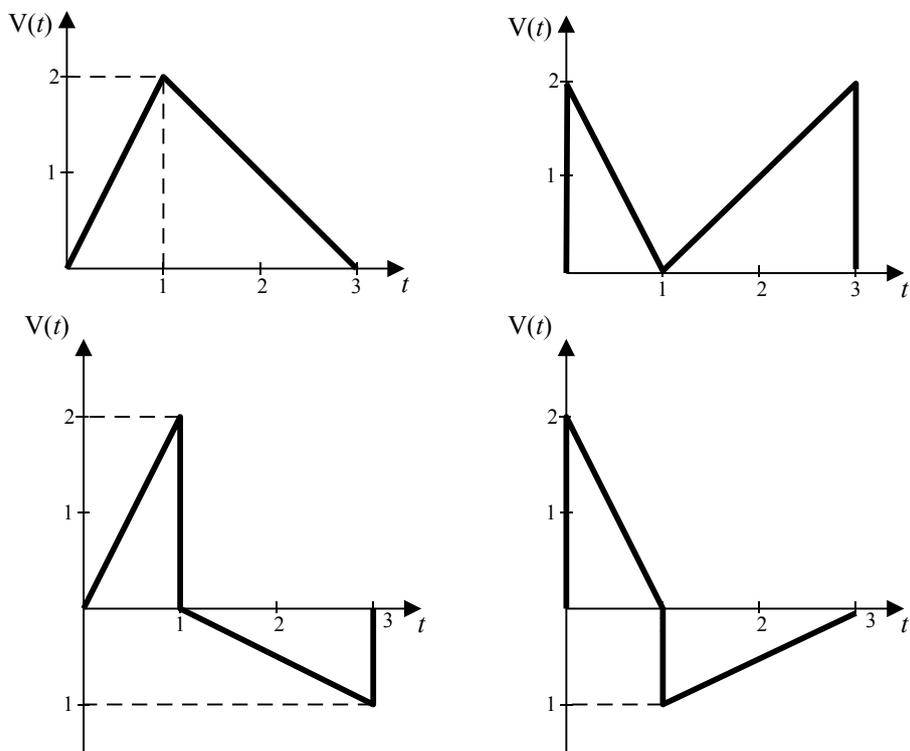


Рис. 2.