Лабораторная работа № 2 (4 часа)

Интерполяция функций, заданных таблично

<u>*Цель работы*</u>: получение практических навыков построения алгоритмов интерполяции таблично заданных функций, программной реализации их на компьютере, оценки погрешности интерполяции.

Краткие теоретические сведения

Пусть задана таблично функция

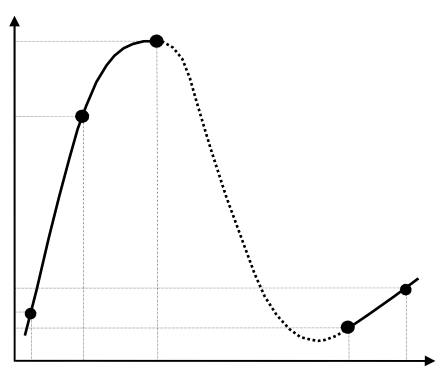
x	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

Под задачей интерполяции функции понимают построение такой функции $f(x)$, которая проходила бы через все заданные точки (x_i,y_i), т.е. для любого i должно выполняться равенство

$$f(x_i) = y_i\ ,\ i = 1,2,...,n\ .$$

Точки (x_i,y_i) называют узлами интерполяции.

Другими словами, задача интерполяции состоит в том, чтобы по значениям функции, заданной в нескольких точках отрезка, восстановить ее значения в остальных точках этого отрезка. Задача интерполирования возникает, например, в том случае, когда известны результаты измерений, наблюдений либо расчета $y_i=f(x_i)$ некоторой физической величины $f(x)$ в точках x_i, i=1,2,...,n, и требуется определить ее значения в других точках. К задаче интерполяции прибегают и в том случае, когда вычисление известной функции очень трудоемко. Поэтому желательно иметь для функции более простую (менее трудоемкую для вычислений) формулу, которая позволяла бы находить приближенное значение функции в любой точке отрезка. В этом случае вычисляют несколько значений этой функции, строят таблицу и производят интерполяцию.



Методы интерполяции находят применение при выводе формул численного дифференцирования и интегрирования, а также при построении графических образов различных объектов.

Геометрически задача отыскания интерполяционной функции $f(x)$ по заданным ее частным значениям означает, что мы должны построить кривую, проходящую через точки плоскости с координатами (x_i,y_i), i=1,2,...,n.

Интерполирующую функцию $f(x)$, как правило, строят в виде линейной комбинации некоторых элементарных функций

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)\ ,$$

где $\{\varphi_j(x)\}$ — множество линейно-независимых функций, называемых базисными; c_j — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Из условий (1) получаем систему n уравнений относительно коэффициентов c_j

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} c_j = y_i, \quad i = 1,2,...,n \ ,$$

где $a_{ji}=\varphi_j(x_i)$. Предположим, что система функций $\varphi_i(x)$ такова, что при любом выборе узлов $x_1, x_2,...,x_n$ отличен от нуля определитель системы:

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & ... & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & ... & \varphi_n(x_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & ... & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда система имеет единственное решение.

Следует отметить, что поскольку к функциям $\varphi_i(x)$ предъявляется только требование линейной независимости, то выбор их неоднозначен. Поэтому задача интерполяции имеет бесконечное множество решений. Предположим, что функция $f(x)$ должна быть не произвольной, а удовлетворять некоторым дополнительным требованиям. Так, иногда требуют, чтобы функция $f(x)$ была полиномом n-1 степени. В этом случае в качестве $\varphi_i(x)$ выбирают полином $P_{i-1}(x)$:

$$\varphi_i(x) = P_{i-1}(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_{i-1}x^{i-1}.$$

Такая интерполяция называется полиномиальной.

Если $\varphi_i(x)=\cos(b_ix+c_i)$, то интерполяцию называют тригонометрической.

Кусочно-полиномиальную интерполяцию, когда

$$\varphi_i(x) = P_k(x);$$

$$c_i \begin{cases} \neq 0, & x_{i-1} \leq x \leq x_i\ ; \\ = 0, & x \notin [x_{i-1}, x_i]; \end{cases}$$

называют сплайн-интерполяцией.

При полиномиальной интерполяции наиболее часто используют формулы Лагранжа и Ньютона. Интерполяционная формула Лагранжа имеет вид:

$$f(x) = P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \ .$$

Формула Ньютона выражает интерполяционный многочлен $P_{n-1}(x)$ через значения y_i в одном из узлов и через разделенные разности функции $f(x)$, построенные по узлам $x_1,x_2,...,x_n$.

$$f(x) = y_1 + (x-x_1)\Delta(x_1,x_2) + (x-x_1)(x-x_2)\Delta(x_1,x_2,x_3) + \cdots + (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n) =$$

$$= y_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\Delta(x_1,x_2,\ldots x_{k-1})\prod_{j=1}^{k}(x-x_j)\right)$$

Разделенная разность k-го порядка определяется как

$$\Delta(x_j, x_{j+1},..., x_{j+k}, x_{j+k}) = \frac{\Delta(x_j, x_{j+1},..., x_{j+k-1}) - \Delta(x_{j+1},..., x_{j+k}, x_{j+k})}{x_j - x_{j+k}},$$

где $\Delta(x_j,x_{j+1},...,x_{j+k-1})$, $\Delta(x_{j+1},x_{j+2},...,x_{j+k})$ разности (k-1)-го порядка. Разделенная разность первого порядка вычисляется по формуле

$$\Delta(x_j, x_k) = \frac{f(x_j) - f(x_k)}{x_j - x_k}$$

По схеме Ньютона при добавлении нового узла к многочлену добавляется только одно слагаемое. В этом состоит основное преимущество многочлена Ньютона по сравнению с методом Лагранжа. Интерполяционную формулу Ньютона удобнее применять в том случае, когда интерполируется одна и та же функция $f(x)$, но число узлов интерполяции постепенно увеличивается. Если узлы интерполяции фиксированы и интерполируется не одна, а несколько функций, то удобнее пользоваться формулой Лагранжа.

Если интерполируемая функция имеет n непрерывных производных на всем отрезке $[x_1,x_n]$, то погрешность полиномиальной интерполяции можно оценить как:

$$R(x) \le \frac{c_n M_n h^n}{n!},$$

где c_n — некоторая постоянная, зависящая от способа разбиения отрезка $[x_1,x_n]$, $M_n = \max\limits_{x\in[x_1,x_n]} \left(y^{(n)}(x)\right)$, h — максимальное расстояние между соседними узлами интерполяции.

Пусть в области двух переменных x, u задана прямоугольная сетка узлов интерполяции X:$(x_1,...,x_n)$, U:$(u_1,...,u_m)$ и узловые значения функции $y_{i,j}=y(x_i,u_j)$, $i=1,2,..,n$; $j=1,2,..,m$. Обозначим через $f_j(x)$ интерполирующую функцию, построенную по узлам X при фиксированном значении $u=u_j$. Тогда интерполирующую функцию двух переменных $f(x,u)$ можно получить как одномерную интерполяцию, построенную на точках $(u_j, f_j(x))$, $j=1,...,m$.

Рабочее задание

1. Построить универсальный алгоритм интерполяции функции двух переменных на регулярной сетке узлов. Исходными данными являются результаты, полученные в лабораторной работе №1. Алгоритм должен по заданным одномерным массивам, определяющим первый и второй аргументы функции, двумерному массиву значений функции в узлах сетки определить значение функции двух переменных в заданной точке.
2. Составить рабочую программу для интерполяции вольт-амперных характеристик заданных активных полупроводниковых приборов. Программа должна быть построена на основе универсальной функции для интерполяции функции двух переменных. Входными параметрами этой универсальной функции должны быть: одномерные массивы, определяющие первый и второй аргументы функции, размерности этих массивов, двумерный массив значений функции в узлах сетки, значения первого и второго аргумента в точке, в которой необходимо рассчитать значение функции. Возвращаемый параметр – значение функции двух переменных в заданной точке.
3. Набрать и отладить программу на компьютере.
4. При фиксированных значениях $U_{зи}= U_{зи1}$, $U_{зи2}$, $U_{зи3}$ получить и записать значения токов полупроводникового прибора в точках между узлами интерполяции. Сравнить полученные значения с результатами, полученными из аналитических формул, использованных в лабораторной работе №1. Рассчитать функцию $I_c(U_{си})$ при $U_{зи} = \dfrac{U_{зи1} + U_{зи2}}{2}$. Сравнить с аналитической зависимостью. Все результаты свести в таблицу и представить графически.

Содержание отчета

1. Название работы.
2. Цель.
3. Рабочее задание.
4. Математические формулировки алгоритма.
5. Рабочая программа.
6. Результаты расчетов.
7. Выводы.