Лабораторна робота № 2 (4 години)

Інтерполяція функцій, заданих таблицями

<u>Мета роботи</u>: отримання практичних навичок побудови алгоритмів інтерполяції таблично заданих функцій, їх програмної реалізації на комп'ютері, оцінки похибки інтерполяції.

Короткі теоретичні відомості

Нехай функція задана таблицею значень

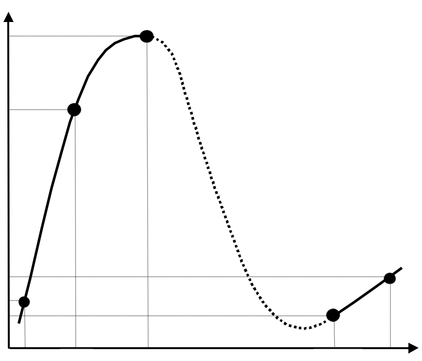
x	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

Під задачею інтерполяції функції розуміють побудову такої функції $f(x)$, яка проходила б через всі задані точки (x_i,y_i), тобто для будь-якого i повинна виконуватися рівність:

$$f(x_i) = y_i\ ,\ i = 1,2,...,n\ . \qquad (1)$$

Точки (x_i,y_i) називають вузлами інтерполяції.

Іншими словами, задача інтерполяції полягає в тому, щоб за значеннями функції, заданими в декількох точках відрізка, відновити її значення в інших точках цього відрізка. Задача інтерполювання виникає, наприклад, в тому випадку, коли відомі результати вимірювань, спостережень або розрахунку $y_i=f(x_i)$ деякої фізичної величини $f(x)$ в точках x_i, i=1,2,...,n, і потрібно визначити її значення в інших точках. До задачі інтерполяції вдаються і в тому випадку, коли обчислення відомої функції дуже трудомістке. Тому бажано мати для функції простішу (менш трудомістку для обчислення) формулу, яка дозволяла б знаходити наближене значення функції в будь-якій точці відрізка. В цьому випадку обчислюють декілька значень цієї функції, будують таблицю і виконують інтерполяцію.



Методи інтерполяції знаходять застосування при виведенні формул чисельного диференціювання і інтегрування, а також при побудові графічних образів різних об'єктів.

Геометрично задача пошуку інтерполяційної функції $f(x)$ по її заданим частковим значенням означає, що ми повинні побудувати криву, яка проходила б через точки площини із координатами (x_i, y_i), i=1,2,...,n.

Інтерполюючу функцію $f(x)$, як правило, будують у вигляді лінійної комбінації деяких елементарних функцій:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)\ ,$$

де $\{\varphi_j(x)\}$ — множина лінійно-незалежних функцій, які називаються базисними; c_j — сталі коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Із умов (1) отримаємо систему n рівнянь відносно коефіцієнтів c_j:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} c_j = y_i, \quad i = 1,2,...,n \ ,$$

де a_{ji}=$\varphi_j(x_i)$. Припустимо, що система функцій $\varphi_i(x)$ така, що при будь-якому виборі вузлів $x_1, x_2,...,x_n$ відрізняється від нуля визначник системи:

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & ... & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & ... & \varphi_n(x_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & ... & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді система має єдиний розв'язок.

Необхідно відмітити, що оскільки до функцій $\varphi_i(x)$ висувається тільки вимога лінійної незалежності, то їх вибір неоднозначний. Тому задача інтерполяції має нескінченну множину розв'язків. Припустимо, що функція $f(x)$ повинна бути не довільною, а задовольняти деякі додаткові вимоги. Так, іноді потрібно, щоб функція $f(x)$ була поліномом n-1 степеня. В цьому випадку в якості $\varphi_i(x)$ вибирають поліном $P_{i-1}(x)$:

$$\varphi_i(x) = P_{i-1}(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_{i-1}x^{i-1}.$$

Така інтерполяція називається поліноміальною.

Якщо $\varphi_i(x)$=cos(b_ix+c_i), то інтерполяцію називають тригонометричною.

Кусково-поліноміальну інтерполяцію, коли

$$\varphi_i(x) = P_k(x);$$
$$c_i \begin{cases} \neq 0, & x_{i-1} \le x \le x_i \,; \\ = 0, & x \notin [x_{i-1}, x_i]; \end{cases}$$

називають сплайн-інтерполяцією.

При поліноміальній інтерполяції найчастіше використовують формули Лагранжа і Ньютона. Інтерполяційна формула Лагранжа має вигляд:

$$f(x) = P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \ .$$

Формула Ньютона виражає інтерполяційний многочлен $P_{n\text{-}1}(x)$ через значення y_i в одному із вузлів і через розділені різниці функції $f(x)$, побудовані за вузлами $x_1,x_2,...,x_n$.

$$f(x) = y_1 + (x - x_1)\Delta(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)\Delta(x_1, x_2, x_3) + \cdots + (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\Delta(x_1, x_2, \ldots x_{k-1}) \prod_{j=1}^{k} (x - x_j) \right).$$

Розділена різниця k-го порядку визначається як:

$$\Delta(x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k-1}, x_{j+k}) = \frac{\Delta(x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k-1}) - \Delta(x_{j+1}, x_{j+2}, ..., x_{j+k})}{x_j - x_{j+k}},$$

де $\Delta(x_j,x_{j+1},...,x_{j+k-1})$, $\Delta(x_{j+1},x_{j+2},...,x_{j+k})$ різниці (k-1)-го порядку. Розділена різниця першого порядку обчислюється за формулою:

$$\Delta(x_j, x_k) = \frac{f(x_j) - f(x_k)}{x_j - x_k}.$$

По схемі Ньютона при додаванні нового вузла до многочлена додається тільки один доданок. В цьому полягає основна перевага многочлена Ньютона в порівнянні з методом Лагранжа. Інтерполяційну формулу Ньютона зручно застосовувати в тому випадку, коли інтерполюється одна і та же функція $f(x)$, але число вузлів інтерполяції поступово збільшується. Якщо вузли інтерполяції фіксовані і інтерполюється не одна, а декілька функцій, то зручніше користуватися формулою Лагранжа.

Якщо інтерпольована функція має n неперервних похідних на всьому відрізку $[x_1,x_n]$, то похибку поліноміальної інтерполяції можна оцінити як:

$$R(x) \le \frac{c_n M_n h^n}{n!},$$

де c_n — деяка стала, яка залежить від способу розбиття відрізка $[x_1,x_n]$, $M_n = \max\limits_{x\in[x_1,x_n]} \left(y^{(n)}(x)\right)$, h — максимальна відстань між сусідніми вузлами інтерполяції.

Нехай в області двох змінних x, u задана прямокутна сітка вузлів інтерполяції X:$(x_1,\ldots,x_n)$, U:$(u_1,\ldots,u_m)$ і вузлові значення функції $y_{i,j}=y(x_i,u_j)$, $i=1,2,..,n$; $j=1,2,..,m$. Позначимо через $f_j(x)$ інтерполюючу функцію, побудовану за вузлами X при фіксованому значенні $u=u_j$. Тоді інтерполюючу функцію двох змінних $f(x,u)$ можна отримати як одномірну інтерполяцію, побудовану на точках $(u_j, f_j(x))$, $j=1,\ldots,m$.

Робоче завдання

1. Побудувати універсальний алгоритм інтерполяції функції двох змінних на регулярній сітці вузлів. Вхідними даними є результати, отримані в лабораторній роботі №1. Алгоритм повинен по заданим одномірним масивам, що визначають перший і другий аргументи функції, двомірному масиву значень функції у вузлах сітки визначити значення функції двох змінних в заданій точці.
2. Скласти робочу програму для інтерполяції вольт-амперних характеристик заданих активних напівпровідникових пристроїв. Програма повинна бути побудована на основі універсальної функції для інтерполяції функції двох змінних. Вхідними параметрами цієї універсальної функції повинні бути: одномірні масиви, що визначають перший і другий аргументи функції, розмірності цих масивів, двомірний масив значень функції у вузлах сітки, значення першого і другого аргументу в точці, в якій необхідно розрахувати значення функції. Параметр, що повертається – значення функції двох змінних в заданій точці.
3. Набрати і налагодити програму на комп'ютері.
4. При фіксованих значеннях $U_{зи}= U_{зи1}$, $U_{зи2}$, $U_{зи3}$ отримати і записати значення струмів напівпровідникового пристрою в точках між вузлами інтерполяції. Порівняти отримані значення із результатами, отриманими із аналітичних формул, використаних в лабораторній роботі №1. Розрахувати функцію $I_c(U_{си})$ при $U_{зи} = \frac{U_{зи1} + U_{зи2}}{2}$. Порівняти з аналітичною залежністю. Всі результати звести в таблицю і представити графічно.

Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета.
3. Робоче завдання.
4. Математичні формулювання алгоритму.
5. Робоча програма.
6. Результати розрахунків.
7. Висновки