Лабораторная работа №4

Численное решение нелинейных уравнений с одним неизвестным

<u>*Цель работы*</u>*:* получение практических навыков построения алгоритмов решения нелинейных уравнений, программной реализации их на компьютере, оценки погрешности решения, сравнение скорости сходимости различных методов.

Краткие теоретические сведения

Задача решения нелинейного уравнения состоит в том, чтобы найти один или более нулей (корней) функции $f(x)$, то есть решение уравнения

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

Задача нахождения корней уравнения (1) обычно решается в два этапа. На первом этапе изучается расположение корней (в общем случае на комплексной плоскости) и проводится их разделение, то есть выделяются области в комплексной плоскости, содержащие только один корень. Этот этап трудно формализовать. Простейший прием решения задачи на этом этапе состоит в том, что вычисляется таблица значений функции $f(x)$ в заданных точках $x_k \in [a,b]$, $k=0,1,...,n$. Если обнаружится, что при некотором k. Числа $f(x_k)$, $f(x_{k+1})$ имеют разные знаки и функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_k,x_{k+1}]$, то это будет означать, что на интервале $[x_k,x_{k+1}]$ уравнение (1) имеет, по крайней мере, один корень. Затем можно разбить интервал $[x_k,x_{k+1}]$ на более мелкие интервалы и с помощью аналогичной процедуры уточнить расположение корня. Тем самым находят начальные приближения для корней уравнения (1).

На втором этапе, для уточнения значения отыскиваемого корня, строится итерационный процесс, то есть строится последовательность $\{x_n\}$: $x_0,x_1,...,x_n$. Причем каждое новое значение аргумента вычисляется на основе предыдущих, то есть в общем случае

$$x_n = \psi_n (x_{n-m},x_{n-m+1},...,x_{n-1}) \text{ , } n \geq m \qquad (2)$$

где ψ_n — некоторая функция, зависящая от метода решения. Итерационный процесс (2) называют m-шаговым.

Пусть x^* — точное решение уравнения (1). Тогда говорят, что итерационный процесс (2) сходится если

$$\lim_{n\to\infty}\left|x_n - x^*\right| = 0 \qquad (3)$$

Критерием эффективности итерационных методов решения нелинейных уравнений является порядок сходимости итерационного процесса. Если (2) сходится к x^* и существуют постоянные $p \geq 1$, $c \geq 0$, $N \geq 0$, такие, что для каждого $n \geq N$

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \leq c\left|x_n - x^*\right|^p \qquad (4)$$

то говорят, что итерационный процесс (2) сходится к x^* с порядком, по меньшей мере, равным p. Если p=2 или 3, то говорят, что скорость сходимости является соответственно квадратичной или кубической. Из (4) следует, что чем больше p, тем быстрее будет сходится итерационный процесс если x_k достаточно близки к x^*. Следует отметить, что чем больше p, тем меньше для получения решения с заданной погрешностью ε понадобится итераций.

Если для некоторой последовательности $\{c_n\}$, сходящейся к 0 (то есть $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$) имеет место

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le c_n \left|x_n - x^*\right| \qquad (5)$$

то говорят, что итерационный процесс сходится сверхлинейно.

В некоторых методах p=p(n). Тогда величину

$$p^* = \lim_{n\to\infty} p(n)$$

называют асимптотической скоростью сходимости.

Итерационный метод, сходящийся с определенной скоростью к истинному решению при условии, что он стартует в достаточной близости от этого решения, называется локально сходящимся с упомянутой скоростью.

Если для итерационного метода выполнены достаточные условия сходимости к единственному решению нелинейного уравнения, то на n-ой итерации условия

$$\frac{\left|x_{n+1} - x_n\right|}{\left|x_n\right|} < \frac{\inf\limits_x \left|\frac{df}{dx}\right| \varepsilon}{\sup\limits_x \left|\frac{df}{dx}\right| (1+\varepsilon)}, \qquad (6)$$

гарантирует получение решения в ходе итерационного процесса с заданной относительной погрешностью ε, то есть

$$\left|x^* - x_n\right| \le \varepsilon \left|x^*\right|$$

Проверка условия (6) может оказаться сложной задачей, поэтому иногда на практике контроль сходимости итерационного процесса (2) осуществляется (более просто но не всегда правильно) следующими способами:

1) Сходимость по аргументу. Для заданных абсолютной Δ или относительной ε погрешности решения задачи (1) итерационный процесс заканчивают если выполнено условие

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \Delta \qquad (7)$$

или

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon \left|x_n\right| \qquad (8)$$

2) Сходимость по функции. Для заданного наименьшей нормы вектора функций δ итерационный процесс заканчивают при выполнении условия

$$\left|f(x_{n+1})\right| \le \delta \qquad (9)$$

Недостаток такого способа: требование знания масштаба функций

3) Комбинированный 1)+2)

Метод бисекции (деления пополам, дихотомии) применяют, если известен интервал $[a,b]$, на котором $f(x)$ меняет знак. В этом случае если $f(x)$ непрерывна, то она имеет на $[a,b]$ по крайней мере один корень. Если известны такие a и b, что $f(a)f(b)<0$, то при заданной относительной погрешности ε определения корня $f(x)$ метод бисекции состоит из таких шагов:

1. Положить $x = \dfrac{a+b}{2}$;
2. Если $f(a)f(x)<0$, то $b=x$; иначе $a=x$;
3. Если $|b-a| > \varepsilon\left|\dfrac{b+a}{2}\right|$, перейти к шагу 1; иначе $x^* \approx \dfrac{a+b}{2}$, конец.

При машинной реализации этого алгоритма следует учитывать проблему машинных нулей и переполнений. Так, например, при выполнении проверки $f(a)f(x_i)<0$ на 2 шаге, если значения функции будут очень большими, то может произойти переполнение и остановка выполнения программы. Если же значения функции очень малые, то проверка может быть осуществлена неверно и произойдет сбой в работе алгоритма. Например: пусть $f(a)$ и $f(x)$ хранятся как вещественные числа обычной точности (наименьшее значение ~ 10^{-38}) и $f(a)=10^{-20}$ а $f(x)=-10^{-19}$. При вычислении произведения даст машинный нуль и условие $f(a)f(x)<0$ не будет выполнено, хотя функции имеют разный знак. Поэтому на 2 шаге вместо приведенной поверки следует использовать условие $\dfrac{f(a)}{|f(a)|} f(x_i) < 0$.

Метод бисекции относится к классу глобально-сходящихся методов. Он довольно медленный и имеет линейную сходимость. Поэтому его, благодаря свойству глобальной сходимости, используют только на начальных итерациях, пока не достигнут некоторой точки, из которой стартует быстрый но локально сходящийся метод.

В методе Ньютона функция $f(x)$ в окрестности точки $x=x_n$ — n-го приближения к решению задачи (1) заменяется линейной моделью:

$$f(x) \approx f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) \qquad (10)$$

Приравнивая в соответствии с (1) представление (14) к нулю находят новое приближение к решению

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (11)$$

Представление (10) есть уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_n. Следовательно, в соответствии с (11) новое приближение x_{n+1} ищется как пересечение касательной к $y=f(x)$ в точке x_n с осью Ox. Поэтому метод Ньютона иногда называют методом касательных.

Для метода Ньютона справедлива оценка

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le c\left|x_n - x^*\right|^2 \qquad (12)$$

где $c = \dfrac{\sup\limits_x |f''(x)|}{2\inf\limits_x |f'(x)|}$

Из (12) следует, что метод Ньютона будет сходиться, если

$$\left|x_0 - x^*\right| c \le 1, \qquad (13)$$

причем в этом случае будет наблюдаться квадратичная сходимость.

Во многих практических приложениях $f(x)$ не задается формулой, а скорее представляет собой результат некоторой вычислительной или экспериментальной процедуры. В этих случаях значение производной $f'(x)$ недоступно. Кроме этого, часто затраты на вычисление $f'(x)$ могут оказаться намного больше, чем вычисление $f(x)$. Группу методов, использующих в качестве $f'(x)$ аппроксимирующее выражение, называют квазиньютоновскими.

В конечно-разностном методе Ньютона производная $f'(x)$ аппроксимируется выражением

$$f'(x) \approx a_n = \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n} \qquad (14)$$

Тогда квазиньютоновский итерационный шаг имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{a_n} \qquad (15)$$

Для конечно-разностного метода Ньютона справедлива оценка

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le \frac{\gamma}{2a_n^-}\left(\left|x^* - x_n\right|^2 - \left|x^* - x_n\right|\right) \qquad (16)$$

Из (16) следует, что сходимость конечно-разностного метода Ньютона зависит от шага конечной разности h_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} h_n \to 0$, то метод сходится сверхлинейно. Если $\exists c_1$, такая, что

$$\left|h_n\right| \le c_1\left|x_n - x^*\right|$$

или, что эквивалентно, константа c_2, такая, что

$$\left|h_n\right| \le c_2\left|f(x_n)\right|$$

($f(x_n) \sim (x_n - x^*)$ вблизи корня), то сходимость метода квадратичная.

Если $\exists c_3$, такая, что

$$\left|h_n\right| \le c_3\left|x_n - x_{n-1}\right|,$$

то сходимость является, по крайней мере, двухшаговой квадратичной ($\left|x_{n+2} - x^*\right| \le c\left|x_n - x^*\right|^2$).

Как видно для увеличения скорости сходимости конечно-разностного метода Ньютона необходимо уменьшать h_n. Однако на практике из-за наличия арифметики конечной точности величина h_n ограничена снизу. Разумный компромисс заключается в том, чтобы сбалансировать ошибку нелинейности, связанную с выбором слишком больших h_n с ошибками арифметики конечной точности. Поэтому на практике часто величину h_n выбирают такой, чтобы внести возмущение примерно в половину разрядов мантиссы x_n:

$$h_i = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon_{маш}}\,x, & \sqrt{\varepsilon_{маш}}\,x \ne 0 \\ \sqrt{\varepsilon_{маш}}\,typ\ x, & \sqrt{\varepsilon_{маш}}\,x = 0 \end{cases},$$

где ε — машинный эпсилон, *typ x* — характерное значение переменной *x*.

Недостатком конечно-разностного метода Ньютона является вычисление на одном шаге сразу двух значений функции $f(x)$. Если вычисление $f(x)$ является дорогостоящим, то дополнительное вычисление функции является нежелательным. В этом случае h_n полагается равным $x_n - x_{n-1}$, поэтому

$$a_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Тогда из (15)

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - x_{n-1})\frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \qquad (17)$$

Таким образом, в итерационном процессе (17) на каждом шаге x_{n+1} получают из x_n и x_{n-1} как единственный нуль линейной функции, принимающей значения $f(x_n)$ в x_n и $f(x_{n-1})$ в x_{n-1}. Эта линейная функция представляет секущую к кривой $y=f(x)$, проходящую через ее точки с абсциссой x_n и x_{n-1}. Поэтому этот метод называют методом секущих. Для метода секущих справедлива следующая оценка:

$$|x_{n+1} - x_*| \le c|x_n - x_*|^p,$$

где $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$.

Метод секущих относится к так называемым двухшаговым итерационным методам, поскольку новое приближение к корню определяется на основании полученных на двух предыдущих шагах. Поскольку на начальной итерации метода секущих также требуется знание двух начальных приближений и значений функции в них, то, как правило, методу секущих предшествует одна итерация одношагового метода, например конечно-разностного метода Ньютона.

Сходимость метода секущих немного медленнее, чем Ньютона и конечно-разностного метода.

Несмотря на немного медленную сходимость, метод секущих часто оказывается более эффективным по сравнению с методами Ньютона и конечно-разностного метода из-за необходимости вычисления на каждой итерации только одного значения функции.

Рабочее задание

1. В соответствии с вариантом для заданной схемотехнической задачи получить нелинейное уравнение, связывающее искомый ток или напряжение с параметрами компонентов схемы. Для этого используются стандартные методы теории цепей.
2. Построить алгоритмы решения нелинейных уравнений методами бисекции (деления пополам), Ньютона с конечно-разностной аппроксимацией производной, секущих.
3. Составить рабочую программу для решения уравнения каждым методом с относительной погрешностью вычисления корня 10^{-6}. Каждый метод должен быть оформлен в виде отдельной универсальной функции. Формальные параметры функции должны включать: имя функции, реализующей вычисление $f(x)$; относительную погрешность вычисления корня; начальное приближение; решение уравнения (возвращаемый параметр).
4. Набрать и отладить программу на компютере.
5. Решить нелинейное уравнение уравнение, полученное в пункте 1. Для каждого метода получить и записать значение и аргумент функции, соответствующей нелинейному уравнению на каждом итерационном шаге. Результаты свести в таблицу 1. Произвести подсчет обращений к функции $f(x)$ каждім методом.

Таблица 1. Результаты решения нелинейного уравнения $f(x)=0$

Номер Итерации	Метод бисекции		Метод Ньютона		Метод секущих	
	x_n	$f(x_n)$	x_n	$f(x_n)$	x_n	$f(x_n)$
Начальное приближение						
1						
2						
...						

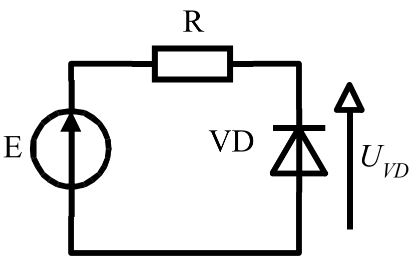
6. Сравнить различные методы по скорости сходимости, надежности, требуемым машинным ресурсам (объем оперативной памяти, количеству арифметических операций, времени выполнения).

Содержание отчета

1. Название работы
2. Цель
3. Рабочее задание
4. Математические формулировки алгоритмов решения нелинейных уравнений каждым методом.
5. Решаемое уравнение.
6. Алгоритм решения в виде рабочей программы.
7. Результаты расчетов.
8. Выводы.

Задачи

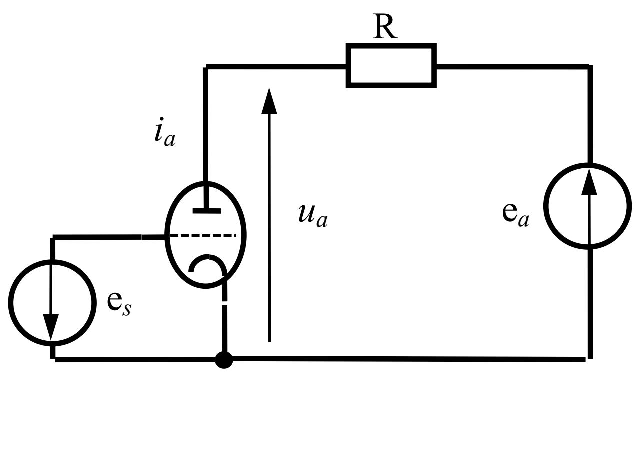
1. Найти напряжение на диоде u_d для схемы, приведенной на рисунке. Применить второй закон Кирхгофа и учесть, что ток i_d, протекающий через диод связан с напряжением u_d зависимостью $i_d = i_0\left(\mathbf{exp}\left(\frac{u_d}{m\varphi_T}\right)-1\right)$, где i_0 — обратный ток диода, φ_T — тепловой потенциал, m — коэффициент неидеальности диода.



Значения напряжения источника e, сопротивления резистора R, и параметры диода выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	e,B	R, 10^3 Ом	i_0, 10^{-9}A	m	φ_T, 10^{-3}B
1	5	1	3	1.7	26
2	10	1.8	6	1.8	26
3	15	3	8	1.6	26

2. Найти напряжение на триоде u_a для схемы, приведенной на рисунке. Применить второй закон Кирхгофа и учесть, что ток i_a, протекающий через триод связан с напряжением u_a зависимостью $i_a = \mathrm{g}\left(\frac{-\mathrm{e}_s + \mathrm{D}u_a}{1+\chi\mathrm{D}}\right)^{\frac{3}{2}}$, где g — первеанс триода, D — проницаемость триода, χ — коэффициент, зависящий от соотношения расстояний анод-

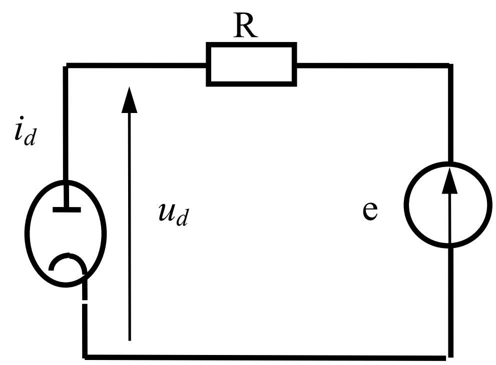


катод и сетка анод.

Значения напряжений источников e_s, e_a, сопротивления резистора R, и параметры триода выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	e_a, В	e_s, В	R, 10^3 Ом	g, 10^{-4} А/В$^{3/2}$	D	χ
1	200	2	50	1.5	0.02	3
2	180	1.5	40	1	0.05	3.5
3	250	3	80	1.7	0.07	4

3. Найти напряжение на диоде u_d для схемы, приведенной на рисунке. Применить второй закон Кирхгофа и учесть, что ток i_d, протекающий через диод связан с напряжением u_d зависимостью $i_a = g u_d^{\frac{3}{2}}$, где g - первеанс диода.



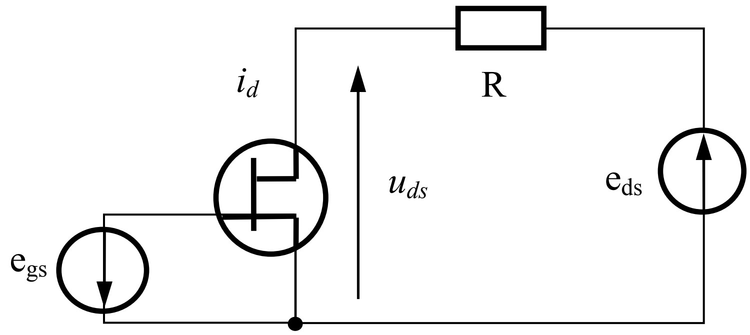
Значения напряжений источника e, сопротивления резистора R, и параметров диода выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	e_a, В	R, 10^3 Ом	g, А/В$^{3/2}$
1	200	80	0.05
2	250	10	0.1
3	180	40	0.03

4. Найти напряжение на полевом транзисторе с управляющим p-n переходом u_{ds} для схемы, приведенной на рисунке. Применить второй закон Кирхгофа и учесть, что ток стока i_d связан с напряжением u_{ds} зависимостью

$$i_d = \begin{cases} g_{22} u_{ds}, & e_{gs} \le u_0 \\ \beta\left(-2\left(e_{gs} + u_0\right) - u_{ds}\right)u_{ds} + g_{22} u_{ds}, & e_{gs} > u_0, \left|u_{ds}\right| < -\left(e_{gs} + u_0\right), \\ \beta\left(e_{gs} + u_0\right)^2 + g_{22} u_{ds}, & e_{gs} > u_0, \left|u_{ds}\right| \ge -\left(e_{gs} + u_0\right) \end{cases}$$

где β - удельная крутизна транзистора, g_{22} - выходная проводимость транзистора, u_0- напряжение отсечки.



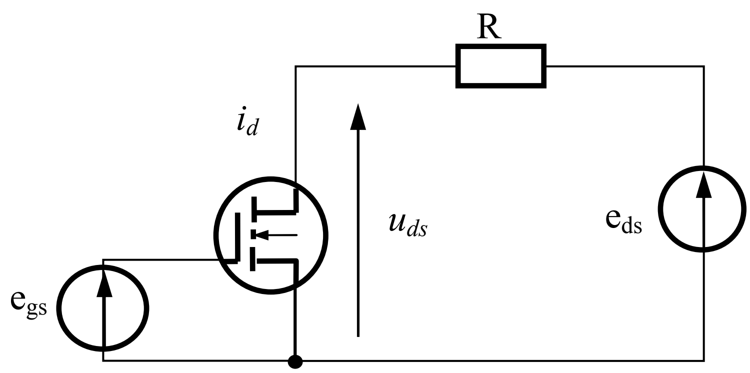
Значения напряжений источников e_{gs} и e_{ds}, сопротивления резистора R, и параметров транзистора выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	e_{gs}, В	e_{ds}, В	R, 10^3 Ом	u_0, В	β, А/В^2	g_{22}, См
1	1.5	10	3	-3	$2\cdot10^{-3}$	10^{-4}
2	2.5	12	4	-4	$1.5\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-4}$
3	3	15	5	-5	$3\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-4}$

5. Найти напряжение на полевом МОП-транзисторе u_{ds} для схемы, приведенной на рисунке. Применить второй закон Кирхгофа и учесть, что ток стока i_d связан с напряжением u_{ds} зависимостью

$$i_d = \begin{cases} g_{22}u_{ds}, & e_{gs} \le u_0 \\ \beta\left(2\left(e_{gs}+u_0\right)-u_{ds}\right)u_{ds} + g_{22}u_{ds}, & e_{gs} > u_0, u_{ds} < \left(e_{gs}-u_0\right), \\ \beta\left(e_{gs}+u_0\right)^2 + g_{22}u_{ds}, & e_{gs} > u_0, u_{ds} \ge \left(e_{gs}-u_0\right) \end{cases}$$

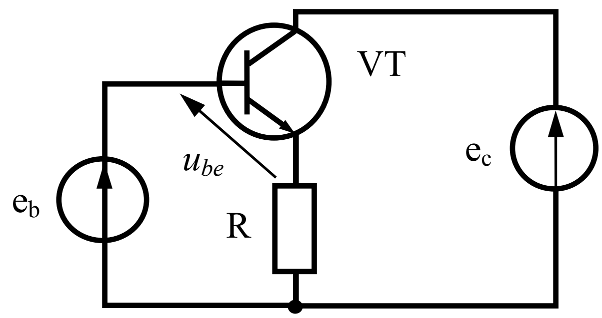
где β - удельная крутизна транзистора, g_{22} - выходная проводимость транзистора.



Значения напряжений источников e_{gs} и e_{ds}, сопротивления резистора R, и параметров транзистора выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	e_{gs},В	e_{ds},В	R, 10^3 Ом	u_0, В	β,А/В^2	g_{22}, См
1	4	10	5	2	$8\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-5}$
2	5	12	4	3	$9\cdot10^{-4}$	$8\cdot10^{-5}$
3	4	15	7	2.5	$1\cdot10^{-3}$	10^{-4}

6. Найти напряжение u_{be} на биполярном транзисторе для схемы, приведенной на рисунке. Применить второй закон Кирхгофа и учесть, что ток эмиттера i_e связан с напряжением u_{be} зависимостью $i_e = i_{e0}\left(\exp\left(\frac{u_{be}+h_{12}(e_c - i_e R)}{m_e \varphi_T}\right)-1\right)$, где i_{e0} - обратный ток эмиттерного перехода транзистора, φ_T - тепловой потенциал, m_e - коэффициент неидеальности эмиттерного перехода транзистора, h_{12} - коэффициент обратной связи.



Значения напряжений источников e_b и e_c, сопротивления резистора R, и параметров транзистора выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	e_b,В	e_c,В	R, 10^3 Ом	i_{e0}, 10^{-9}А	m_e	φ_T, 10^{-3}В	h_{21},10^{-3}
1	4	10	5	1	1.01	26	2
2	5	12	4	2	1.05	26	1
3	6	15	7	2.5	1.06	26	1.5

7. Концентрация собственных носителей электрического заряда в кремнии описывается уравнением $n_i = 4.9\cdot 10^{15}\left(\frac{m_n^* m_p^*}{m_0^2}\right)^{\frac{3}{4}} T^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{qE_g}{2kT}\right)$, где m_n^* - эффективная масса электронов, m_p^*- эффективная масса дырок, m_0- масса электрона, T - абсолютная температура, q - заряд электрона, E_g - ширина запрещенной зоны кремния, k - постоянная Больцмана. При какой температуре концентрация собственных носителей равна n_i=$2\cdot 10^{10}$см$^{-3}$? Учесть, что $\frac{m_n^*}{m_0}=0.98$, $\frac{m_p^*}{m_0}=0.05$, q=$1.6\cdot 10^{-19}$ Кл, k=$1.38\cdot 10^{-23}$Дж/К, E_g=1.2эВ, размерность коэффициента 4.9.10^{15} - см$^{-3}$К$^{-3/2}$.

Варианты заданий

Номер бригады	Номер задачи	Номер варианта задачи
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1
5	5	1
6	6	1
7	7	-
8	1	2
9	2	2
10	3	2
11	4	2
12	5	2
13	6	2
14	1	3
15	4	3
16	5	3