Лабораторна робота №4

Чисельне розв'язання нелінійних рівнянь з однією невідомою

<u>*Мета роботи:*</u> одержання практичних навичок побудови алгоритмів розв'язання нелінійних рівнянь, їх програмної реалізації на комп'ютері, оцінки похибки розв'язку, порівняння швидкості збіжності різних методів.

Короткі теоретичні відомості

Задача розв'язання нелінійного рівняння полягає в тому, щоб знайти один або більше нулів (коренів) функції $f(x)$, тобто розв'язок рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Задача знаходження коренів рівняння (1) зазвичай розв'язується у два етапи. На першому етапі вивчається розташування коренів (в загальному випадку на комплексній площині) і проводиться їх поділ, тобто виділяються області в комплексній площині, що містять тільки один корінь. Цей етап важко формалізувати. Найпростіший прийом розв'язання задачі на цьому етапі полягає в тому, що обчислюється таблиця значень функції $f(x)$ у заданих точках $x_k \in [a,b]$, $k=0,1,\dots,n$. Якщо виявиться, що при деякому k. Числа $f(x_k)$, $f(x_{k+1})$ мають різні знаки і функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[x_k,x_{k+1}]$, то це буде означати, що на інтервалі $[x_k,x_{k+1}]$ рівняння (1) має, принаймні, один корінь. Потім можна розбити інтервал $[x_k,x_{k+1}]$ на більш дрібніші інтервали і за допомогою аналогічної процедури уточнити розташування кореня. Тим самим знаходять початкові наближення для коренів рівняння (1).

На другому етапі, для уточнення значення шуканого кореня, будується ітераційний процес, тобто будується послідовність $\{x_n\}$: $x_0, x_1, \dots, x_n$. Причому кожне нове значення аргументу обчислюється на основі попередніх, тобто в загальному випадку

$$x_n = \psi_n(x_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_{n-1}), \; n \ge m \tag{2}$$

де ψ_n — деяка функція, що залежить від методу розв'язання. Ітераційний процес (2) називають m-кроковим.

Нехай x^* — точний розв'язок рівняння (1). Тоді говорять, що ітераційний процес (2) збігається якщо

$$\lim_{n\to\infty} \left| x_n - x^* \right| = 0. \tag{3}$$

Критерієм ефективності ітераційних методів рішення нелінійних рівнянь є порядок збіжності ітераційного процесу. Якщо (2) збігається до x^* і існують сталі $p \ge 1$, $c \ge 0$, $N \ge 0$, такі, що для кожного $n \ge N$

$$\left| x_{n+1} - x^* \right| \le c \left| x_n - x^* \right|^p, \tag{4}$$

то говорять, що ітераційний процес (2) сходиться до x^* з порядком принаймні p. Якщо $p=2$ або 3, то говорять, що швидкість збіжності є відповідно квадратичною або кубічною. З (4) випливає, що чим більше p, тим швидше буде збігатися ітераційний процес якщо x_k

досить близькі до x^*. Слід зазначити, що чим більше p, тим менше знадобиться ітерацій для одержання розв'язку із заданою похибкою.

Якщо для деякої послідовності $\{c_n\}$, що збігається до 0 (тобто є $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$) має місце

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le c_n \left|x_n - x^*\right| \qquad (5)$$

то говорять, що ітераційний процес збігається надлінійно.

В деяких методах $p=p(n)$. Тоді величину

$$p^* = \lim_{n\to\infty} p(n)$$

називають асимптотичною швидкістю збіжності.

Ітераційний метод, що збігається з певною швидкістю до істинного розв'язку за умови, що він стартує в достатній близькості від цього рішення, називається локально збіжним зі згаданою швидкістю.

Якщо для ітераційного методу виконані достатні умови збіжності до єдиного рішення нелінійного рівняння, то на n-ій ітерації виконання умови

$$\frac{\left|x_{n+1} - x_n\right|}{\left|x_n\right|} < \frac{\inf\limits_x \left|\frac{df}{dx}\right| \quad \varepsilon}{\sup\limits_x \left|\frac{df}{dx}\right| \quad (1+\varepsilon)}, \qquad (6)$$

гарантує отримання розв'язку в ході ітераційного процесу із заданою відносною похибкою ε, тобто

$$\left|x^* - x_n\right| \le \varepsilon \left|x^*\right|$$

Перевірка умови (6) може виявитися складною задачею, тому іноді на практиці контроль збіжності ітераційного процесу (2) здійснюється (більш просто але не завжди правильно) наступними способами:

1) Збіжність по аргументу. Для заданих абсолютної Δ або відносної ε похибки розв'язання задачі (1) ітераційний процес закінчують якщо виконана умова

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \Delta \qquad (7)$$

або

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon \left|x_n\right| \qquad (8)$$

2) Збіжність по функції. Для заданої найменшої норми вектора функцій δ ітераційний процес закінчують при виконанні умови

$$\left|f(x_{n+1})\right| \le \delta \qquad (9)$$

Недолік такого способу: вимога знання масштабу функції

3) Комбінований 1)+2)

Метод бісекції (поділу навпіл, дихотомії) застосовують, якщо відомий відрізок $[a,b]$, на якому $f(x)$ змінює знак. В цьому випадку якщо $f(x)$ неперервна, то вона має на $[a,b]$, принаймні, один корінь. Якщо відомі такі a і b, що $f(a)f(b)<0$, то при заданій відносній похибці ε визначення кореня $f(x)$ методом бісекції складається із таких кроків:

1. Покласти $x = \dfrac{a+b}{2}$;
2. Якщо $f(a)f(x)<0$, то $b=x$; інакше $a=x$;
3. Якщо $|b-a| > \varepsilon \left|\dfrac{b+a}{2}\right|$, перейти до кроку 1; інакше $x^* \approx \dfrac{a+b}{2}$, кінець.

При машинній реалізації цього алгоритму треба враховувати проблему машинних нулів і переповнень. Так, наприклад, при виконанні перевірки $f(a)f(x_i)<0$ на 2 кроці, якщо значення функції будуть дуже великими, то може відбутися переповнення і зупинка виконання програми. Якщо ж значення функції дуже малі, то перевірка може бути виконана неправильно і відбудеться збій в роботі алгоритму. Наприклад: нехай $f(a)$ і $f(x)$ зберігаються як дійсні числа звичайної точності (найменше значення~10^{-38}) і $f(a) = 10^{-20}$ а $f(x) = -10^{-19}$. При обчисленні добутку отримаємо машинний нуль і умова $f(a)f(x)<0$ не буде виконана, хоча функції і мають різний знак. Тому на 2 кроці замість наведеної перевірки слід використовувати умову $\dfrac{f(a)}{|f(a)|} f(x_i) < 0$.

Метод бісекції відноситься до класу глобально-збіжних методів. Він доволі повільний і має лінійну збіжність. Тому його, завдяки властивості глобальної збіжності, використовують тільки на початкових ітераціях, поки не досягнуть деякої точки, із якої стартує швидкий, але локально збіжний метод.

В методі Ньютона функція $f(x)$ в околиці точки $x=x_n$ — n-го наближення до розв'язку задачі (1) замінюється лінійною моделлю:

$$f(x) \approx f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) \tag{10}$$

Прирівнюючи у відповідності до (1) запис (10) до нуля знаходять нове наближення до розв'язку

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{11}$$

Апроксимація (11) є рівнянням дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці x_n. Отже, у відповідності з (11) нове наближення x_{n+1} шукається як перетин дотичної до $y=f(x)$ в точці x_n з віссю Ox. Тому метод Ньютона іноді називають методом дотичних.

Для метода Ньютона справедлива оцінка

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le c\left|x_n - x^*\right|^2, \tag{12}$$

де $c = \dfrac{\sup\limits_x |f''(x)|}{2\inf\limits_x |f'(x)|}$

Із (12) випливає, що метод Ньютона збігається, якщо

$$\left|x_0 - x^*\right| c \le 1, \tag{13}$$

причому в цьому випадку буде спостерігатися квадратична збіжність.

В багатьох практичних задачах $f(x)$ не задається формулою, а є результатом деякої обчислювальної або експериментальної процедури. В цих випадках значення похідної $f'(x)$ недоступне. Крім цього, часто затрати на обчислення $f'(x)$ можуть виявитися набагато більшими, ніж обчислення $f(x)$. Групу методів, які використовують замість $f'(x)$ апроксимуючий вираз, називають квазіньютонівськими.

В скінчено-різницевому методі Ньютона похідна $f'(x)$ апроксимується виразом

$$f'(x) \approx a_n = \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n}. \tag{14}$$

Тоді квазіньютонівський ітераційний крок має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{a_n}. \tag{15}$$

Для скінчено-різницевого метода Ньютона справедлива оцінка

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le \frac{\sup\limits_x \left|f''(x)\right|}{2a_n}\left(\left|x^* - x_n\right|^2 - \left|x^* - x_n\right|\right). \tag{16}$$

Із (16) випливає, що збіжність скінчено-різницевого метода Ньютона залежить від кроку скінченої різниці h_n. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} h_n \to 0$, то метод сходиться снадлінійно. Якщо існує стала c_1, така, що

$$\left|h_n\right| \le c_1 \left|x_n - x^*\right|$$

або (що еквівалентно) константа c_2, така, що

$$\left|h_n\right| \le c_2 \left|f\left(x_n\right)\right|$$

($f(x_n)$~$(x_n - x^*)$ поблизу кореня), то збіжність метода квадратична.

Якщо існує стала c_3, така, що

$$\left|h_n\right| \le c_3 \left|x_n - x_{n-1}\right|,$$

то збіжність, принаймні, двокрокова квадратична ($\left|x_{n+2} - x^*\right| \le c\left|x_n - x^*\right|^2$).

Як видно, для збільшення швидкості збіжності скінчено-різницевого методу Ньютона необхідно зменшувати h_n. Однак на практиці через наявність арифметики скінченої точності величина h_n обмежена знизу. Розумний компроміс полягає в тому, щоб збалансувати похибку нелінійності, пов’язану з вибором надто великих h_n із похибками арифметики скінченої точності. Тому на практиці часто величину h_n вибирають такою, щоб внести збурення приблизно в половину розрядів мантиси x_n:

$$h_i = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon_{маш}}\, x, & \sqrt{\varepsilon_{маш}}\, x \ne 0 \\ \sqrt{\varepsilon_{маш}}\; typ\ x, & \sqrt{\varepsilon_{маш}}\, x = 0 \end{cases},$$

де ε — машинний епсилон, *typ x* — характерне значення змінної *x*.

Недоліком скінчено-різницевого методу Ньютона є обчислення на одному кроці відразу двох значень функції *f*(*x*). Якщо обчислення *f*(*x*) дороге, то додаткове обчислення функції небажане. В цьому випадку h_n вважається рівним $x_n - x_{n-1}$, тому

$$a_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Тоді із (15)

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - x_{n-1})\frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{17}$$

Таким чином, в ітераційному процесі (17) на кожному кроці x_{n+1} отримують із x_n і x_{n-1} як єдиний нуль лінійної функції, що набуває значення $f(x_n)$ в x_n і $f(x_{n-1})$ в x_{n-1}. Ця лінійна функція є січною до кривої $y=f(x)$, яка проходить через її точки із абсцисою x_n і x_{n-1}. Тому цей метод називають методом січних. Для методу січних справедлива оцінка:

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le c\left|x_n - x^*\right|^p,$$

де $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$.

Метод січних відноситься до так званих двокрокових ітераційних методів, оскільки нове наближення до кореня визначається на основі отриманих на двох попередніх кроках. Оскільки на початковій ітерації методу січних також потрібне знання двох початкових наближень і значень функції в них, то, як правило, методу січних передує одна ітерація однокрокового методу, наприклад скінчено-різницевий метода Ньютона.

Збіжність методу січних трохи повільніша, ніж Ньютона і скінчено-різницевого методу. Незважаючи на трохи повільну збіжність, метод січних часто виявляється більш ефективним порівняно з методами Ньютона і скінчено-різницевим методу через необхідність обчислення на кожній ітерації тільки одного значення функції.

Робоче завдання

1. Відповідно до варіанта для заданого схемотехнічного завдання одержати нелінійне рівняння, що зв'язує шуканий струм або напругу з параметрами компонентів схеми. Для цього використати стандартні методи теорії кіл.
2. Побудувати алгоритми розв'язання нелінійних рівнянь методами бісекції (поділу навпіл), Ньютона зі скінчено-різницевою апроксимацією похідної, січних.
3. Скласти робочу програму для розв'язання рівняння кожним із методів з відносною похибкою обчислення кореня 10^{-6}. Кожен метод повинен бути оформлений у вигляді окремої універсальної функції. Формальні параметри функції повинні включати: ім'я функції, що реалізує обчислення $f(x)$; відносну похибку обчислення кореня; початкове наближення; розв'язок рівняння (параметр, що повертається).
4. Набрати й налагодити програму на комп'ютері.
5. Розв'язати нелінійне рівняння, отримане в пункті 1. Для кожного методу отримати і записати значення й аргумент функції, що відповідає нелінійному рівнянню на кожному ітераційному кроці. Результати звести в таблицю 1. Зробити підрахунок звернень до функції f(x) кожним методом.

Таблиця 1. Результати рішення нелінійного рівняння $f(x)=0$

Номер ітерації	Метод бісекції		Метод Ньютона		Метод січних	
	x_n	$f(x_n)$	x_n	$f(x_n)$	x_n	$f(x_n)$
Початкове наближення						
1						
2						
...						

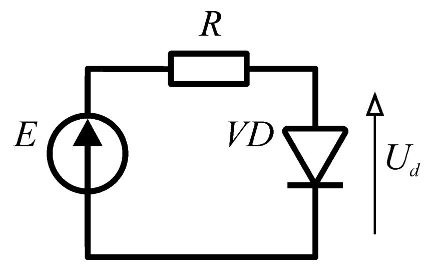
Порівняти різні методи за швидкістю збіжності, надійністю, необхідним машинним ресурсам (обсяг оперативної пам'яті, кількість арифметичних операцій, час виконання).

Зміст звіту

1. Назва роботи
2. Мета
3. Робоче завдання
4. Математичні формулювання алгоритмів розв'язання нелінійних рівнянь кожним із методів.
5. Розв'язуване рівняння.
6. Алгоритм розв'язання у вигляді робочої програми.
7. Результати розрахунків.
8. Висновки.

Задачі

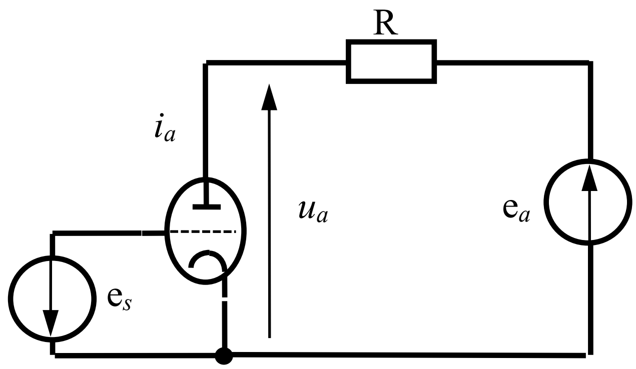
1. Знайти напругу на діоді u_d для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати другий закон Кірхгофа і врахувати, що струм i_d, який протікає через діод пов'язаний з напругою u_d залежністю $i_d = i_0\left(\exp\left(\frac{u_d}{m\phi_T}\right) - 1\right)$, де i_0 — зворотний струм діода, φ_T — тепловий потенціал, m — коефіцієнт неідеальності діода.



Значення напруги джерела e, опір резистора R, і параметри діода вибрати із таблиці відповідно до варіанта

№ варіанту	e,В	R, 10^3 Ом	i_0, 10^{-9}A	m	φ_T, 10^{-3}В
1	5	1	3	1.7	26
2	10	1.8	6	1.8	26
3	15	3	8	1.6	26

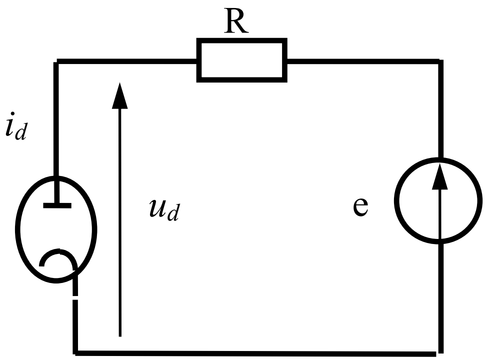
2. Знайти напругу на тріоді u_a для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати другий закон Кірхгофа і врахувати, що струм i_a, який протікає через тріод пов'язаний з напругою u_a залежністю $i_a = \mathrm{g}\left(\frac{-\mathrm{e}_s + \mathrm{D}u_a}{1+\chi\mathrm{D}}\right)^{\frac{3}{2}}$, де g — первеанс тріода, D — проникність тріода, χ — коефіцієнт, який залежить від співвідношення відстаней анод-катод і сітка анод.



Значення напруг джерел e_s, e_a, опір резистора R, і параметри тріода вибрати із таблиці відповідно до варіанта

№ варіанту	e_a, В	e_s, В	R, 10^3 Ом	g, 10^{-4} А/В$^{3/2}$	D	χ
1	200	2	50	1.5	0.02	3
2	180	1.5	40	1	0.05	3.5
3	250	3	80	1.7	0.07	4

3. Знайти напругу на діоді u_d для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати другий закон Кірхгофа і врахувати, що струм i_d, який протікає через діод пов'язаний з напругою u_d залежністю $i_a = \mathrm{g} u_d^{\frac{3}{2}}$, де g - первеанс діода.



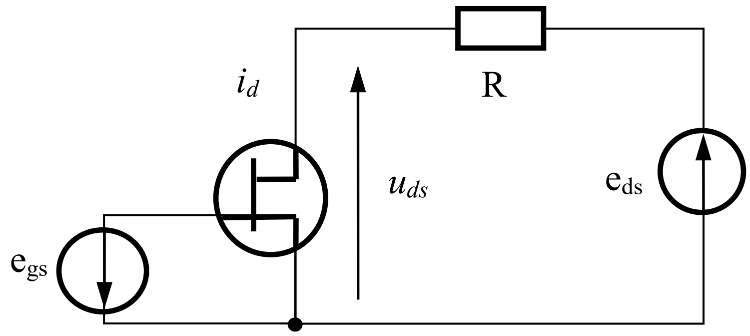
Значення напруг джерела e, опір резистора R, і параметрів діода вибрати із таблиці відповідно до варіанта

№ варіанту	e_a, В	R, 10^3 Ом	g, А/В$^{3/2}$
1	200	80	0.05
2	250	10	0.1
3	180	40	0.03

4. Знайти напругу на польовому транзисторі із керуючим p-n переходом u_{ds} для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати другий закон Кірхгофа і врахувати, що струм стоку i_d пов'язаний с напругою u_{ds} залежністю

$$i_d = \begin{cases} g_{22} u_{ds}, & \mathrm{e}_{gs} \le u_0 \\ \beta\left(-2\left(\mathrm{e}_{\text{◆◆}}\ \ {}_0\right) - u_{ds}\right) u_{ds} + g_{22} u_{ds}, & \mathrm{e}_{gs} > u_0, \left|u_{ds}\right| < -\left(\mathrm{e}_{gs} + u_0\right), \\ \beta\left(\mathrm{e}_{gs} + u_0\right)^2 + g_{22} u_{ds}, & \mathrm{e}_{gs} > u_0, \left|u_{ds}\right| \ge -\left(\mathrm{e}_{gs} + u_0\right) \end{cases}$$

де β - питома крутизна транзистора, g_{22} - вихідна провідність транзистора, u_0- напруга відсічки.



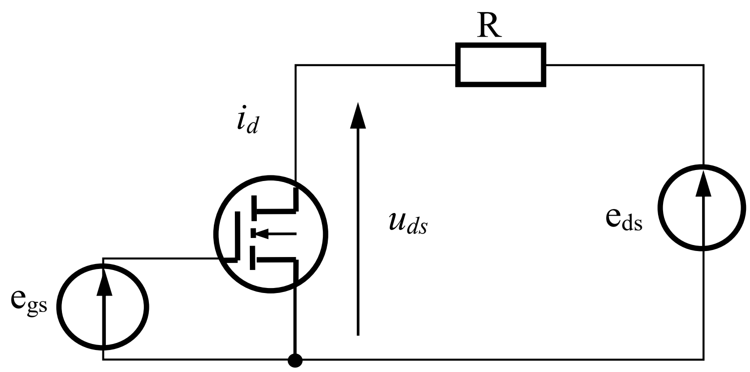
Значення напруг джерел e_{gs} і e_{ds}, опір резистора R, і параметрів транзистора вибрати із таблиці відповідно до варіанта

№ варіанту	e_{gs}, В	e_{ds}, В	R, 10^3 Ом	u_0, В	β, А/В^2	g_{22}, См
1	1.5	10	3	-3	$2\cdot10^{-3}$	10^{-4}
2	2.5	12	4	-4	$1.5\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-4}$
3	3	15	5	-5	$3\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-4}$

5. Знайти напругу на польовому МДН-транзисторі u_{ds} для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати другий закон Кірхгофа і врахувати, що струм стоку i_d пов'язаний із напругою u_{ds} залежністю

$$i_d = \begin{cases} g_{22}u_{ds}, & e_{gs} \le u_0 \\ \beta\left(2\left(e_{gs}+u_0\right)-u_{ds}\right)u_{ds}+g_{22}u_{ds}, & e_{gs} > u_0, u_{ds} < \left(e_{gs}-u_0\right), \\ \beta\left(e_{gs}+u_0\right)^2+g_{22}u_{ds}, & e_{gs} > u_0, u_{ds} \ge \left(e_{gs}-u_0\right) \end{cases}$$

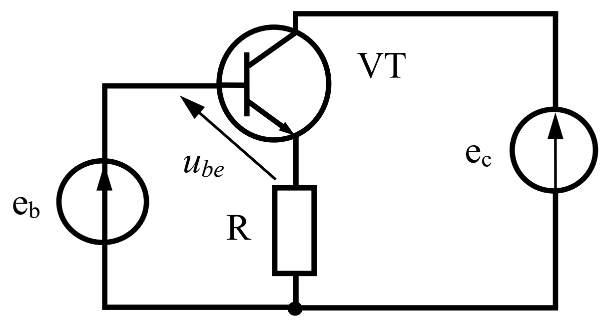
де β - питома крутизна транзистора, g_{22} - вихідна провідність транзистора.



Значення напруг джерел e_{gs} и e_{ds}, опір резистора R, і параметрів транзистора вибрати із таблиці відповідно до варіанта

№ варіанту	e_{gs},В	e_{ds},В	R, 10^3 Ом	u_0, В	β,А/В^2	g_{22}, См
1	4	10	5	2	$8\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-5}$
2	5	12	4	3	$9\cdot10^{-4}$	$8\cdot10^{-5}$
3	4	15	7	2.5	$1\cdot10^{-3}$	10^{-4}

6. Знайти напругу u_{be} на біполярному транзисторі для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати другий закон Кирхгофа и врахувати, що струм емітера i_e пов’язаний з напругою u_{be} залежністю $i_e = i_{e0}\left(\exp\left(\frac{u_{be}+h_{12}(\mathrm{e}_c - i_e R)}{m_e \varphi_T}\right)-1\right)$, де i_{e0} - зворотний струм емітерного переходу транзистора, φ_T - тепловий потенціал, m_e - коефіцієнт неідеальності емітерного переходу транзистора, h_{12} - коефіцієнт зворотного зв’язку.



Значення напруг джерел e_b і e_c, опір резистора R, і параметрів транзистора вибрати із таблиці відповідно до варіанта

№ варіанту	e_b,В	e_c,В	R, 10^3 Ом	i_{e0}, 10^{-9}А	m_e	φ_T, 10^{-3}В	h_{21},10^{-3}
1	4	10	5	1	1.01	26	2
2	5	12	4	2	1.05	26	1
3	6	15	7	2.5	1.06	26	1.5

7. Концентрація власних носіїв електричного заряду в кремнії описується рівнянням $n_i = 4.9\cdot 10^{15}\left(\frac{m_n^* m_p^*}{m_0^2}\right)^{\frac{3}{4}} T^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{qE_g}{2kT}\right)$, де m_n^* - ефективна маса електронів, m_p^*- ефективна маса дірок, m_0- маса електрона, T - абсолютна температура, q - заряд електрона, E_g - ширина забороненої зони кремнію, k - стала Больцмана. При якій температурі концентрація власних носіїв дорівнює n_i=$2\cdot10^{10}$ см$^{-3}$? Врахувати, що $\frac{m_n^*}{m_0} = 0.98$, $\frac{m_p^*}{m_0} = 0.05$, q=$1.6\cdot10^{-19}$ Кл, k=$1.38\cdot10^{-23}$ Дж/К, E_g=1.2эВ, розмірність коефіцієнта $4.9\cdot10^{15}$ - см$^{-3}$К$^{-3/2}$.

Варіанти завдань

Номер бригади	Номер задачі	Номер варіанту задачі
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1
5	5	1
6	6	1
7	7	-
8	1	2
9	2	2
10	3	2
11	4	2
12	5	2
13	6	2
14	1	3
15	4	3
16	5	3