

## Численное решение задачи Коши для одного дифференциального уравнения

Цель работы: получение практических навыков построения алгоритмов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, оценки погрешности решения, автоматического выбора шага интегрирования, программной реализации алгоритмов на компьютере, сравнение эффективности различных методов.

### Краткие теоретические сведения

Задачей Коши называют задачу решения дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (1)$$

где  $f(t, y)$  - заданная непрерывная функция двух аргументов, с начальным условием:

$$y(0) = y_0. \quad (2)$$

При численном решении задачи Коши по переменной  $t$  вводят сетку  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  и ищут значения неизвестной функции в узлах сетки  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

В явном методе Эйлера приближенное решение задачи Коши находится по рекуррентной формуле:

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i), \quad (3)$$

где  $h_i = t_{i+1} - t_i$ .

Локальная погрешность явного метода Эйлера равна:

$$R_i = \frac{y''(t_i)}{2} h_i^2. \quad (4)$$

В неявном методе Эйлера приближенное решение задачи Коши находится в результате решения нелинейного уравнения:

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_{i+1}, y_{i+1}). \quad (5)$$

Локальная погрешность неявного метода Эйлера равна:

$$R_i = -\frac{y''(t_{i+1})}{2} h_i^2. \quad (6)$$

В классическом методе Рунге-Кутты четвертого порядка приближенное решение задачи Коши находится по рекуррентной формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (7)$$

где  $k_1 = f(t_i, y_i)$ ;

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}k_1\right);$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}k_2\right);$$

$$k_4 = f(t_i + h_i, y_i + h_ik_3).$$

При использовании такого метода на каждом шаге вычисляются 4 значения функции  $f(t,y)$ . Метод имеет четвертый порядок точности, то есть  $R_i=O(h_i^5)$ .

В самом общем случае метод Рунге-Кутты порядка точности  $p$  строится по рекуррентной формуле:

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^m c_j k_j, \quad (8)$$

где

$$k_j = f\left(t_i + a_j h_i, y_i + h_i \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl} k_l\right), \quad (9)$$

$a_l=0$ ,  $a_j$  и  $c_j$  — константы,  $b_{jl}$  — элементы нижнетреугольной матрицы, такой, что каждое  $k_j$  получается по предыдущим значениям  $k_l$ .

Формулы (8) и (9) содержат  $\frac{m(m-1)}{2} + 2m - 1$  коэффициентов, подлежащих определению:  $\frac{m(m-1)}{2}$  коэффициентов  $b_{jl}$ ,  $m-1$  коэффициентов  $a_j$ , и  $m$  коэффициентов  $c_j$ .

Чтобы определить эти коэффициенты все функции  $k_j$  раскладывают в ряд Тейлора в окрестности точки  $(y_i, t_i)$ . Эти разложения подставляют в формулу (8) и результат сравнивают с рядом Тейлора для функции  $y(t_{i+1})$ . Поскольку локальная погрешность определяется как разность:

$$R_i = y(t_{i+1}) - y_{i+1},$$

то ставится требование, чтобы коэффициенты при всех  $h_i^l, l = \overline{0, p}$  в разложениях для  $y(t_{i+1})$  и  $y_{i+1}$  были равны. Это требование дает систему уравнений относительно коэффициентов  $b_{jl}, a_j$  и  $c_j$ . При этом соответствующие системы уравнений относительно  $b_{jl}, a_j$  и  $c_j$  для  $p=2,3,4$  могут быть решены соответственно для  $m=2,3,4$ . Следовательно, что для того, чтобы построить метод порядка точности  $p$  для  $p=2,3$  и 4 достаточно  $m=p$  обращений к функции  $f(y,t)$ . Однако для  $p=5$  эта система может быть решена только для  $m \geq 6$ . Следовательно, для метода Рунге-Кутты 5 порядка точности требуется, по крайней мере, 6 вызовов функции на каждом шаге. Аналогично для  $p=6$   $m \geq 7$ .

Возможны различные способы выбора коэффициентов, приводящие к методам Рунге-Кутты пятого порядка точности. Особый интерес представляют коэффициенты, приведенные в таблице 7.1, которые были впервые найдены Фелбергом, поскольку они позволяют при одном и том же выборе  $k_j$ , но других  $c_j^*$  построить метод четвертого порядка точности. Как будет показано ниже, это дает возможность апостериорно оценить локальную погрешность решения. Позже были найдены и другие наборы коэффициентов,

обладающие такой же особенностью (см. например таблицу 7.2). Многие современные алгоритмы строятся на этом же принципе, но для  $m=7$ , имеющие более высокую устойчивость.

Таблица 7.1. Коэффициенты Фелберга (Fehlberg) методов Рунге-Кутты 4 и 5 порядков точности.

$j$	$a_i$	$b_{jl}$					$c_j$	$c_j^*$
		$l$						
		1	2	3	4	5		
1	0						$\frac{16}{135}$	$\frac{25}{216}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					0	0
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				$\frac{6656}{12825}$	$\frac{1408}{2565}$
4	$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			$\frac{28561}{56430}$	$\frac{2197}{4104}$
5	1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		$-\frac{9}{50}$	$-\frac{1}{5}$
6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	$\frac{2}{55}$	0

Таблица 7.2. Коэффициенты Кеша-Карпа (Cash-Karp) методов Рунге-Кутты 4 и 5 порядков точности.

$j$	$a_i$	$b_{jl}$					$c_j$	$c_j^*$
		$l$						
		1	2	3	4	5		
1	0						$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$

При использовании какого-либо из методов интегрирования задачи Коши задается точность, требуемая в решении. Однако, как правило, нет информации о величине шага, необходимой, чтобы достигнуть ее. Более того, требования к величине шага обычно меняются в процессе решения. Поэтому существенно, чтобы алгоритм включал автоматический выбор шага. Для этого необходимо апостериорно, т.е. после проведения вычисления, оценить погрешность полученного результата. Существует несколько подходов к практической оценке погрешности численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Простейший подход основан на применении первого правила Рунге. Для этого на каждом шаге при переходе от  $t_i$  к  $t_{i+1}$  вычисления проводятся дважды с шагами  $h$  и  $\frac{h}{q}$ . Полученные значения  $y_{i+1,h}$ ,  $y_{i+1,\frac{h}{q}}$  служат для сравнения достигнутой точности на этом шаге:

$$R_i \approx \frac{y_{i+1,\frac{h}{q}} - y_{i+1,h}}{q^p - 1}, \quad (10)$$

где  $p$  – порядок точности метода.

При использовании неявных методов интегрирования дифференциальных уравнений применение правила Рунге (10) приводит к большим машинным затратам, поскольку при измельчении сетки приходится в  $q$  раз больше решать нелинейных уравнений. Поэтому в этих случаях стараются применять другие апостериорные оценки погрешности. Например, при использовании неявного метода Эйлера учитывают, что если шаг  $h_i$  мал, то можно считать, что  $y''(t_i) \approx y''(t_{i+1})$ . Следовательно, как вытекает из формул (4) и (6), погрешности явного и неявного методов почти равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Поэтому после получения решения  $y_{i+1}$  неявного метода Эйлера можно вычислить значение  $u_{i+1}$  по явной схеме и оценить погрешность как:

$$R_i \approx \frac{(u_{i+1} - y_{i+1})}{2}. \quad (11)$$

Другой способ оценки погрешности состоит в получении оценки производной, входящей в выражение для погрешности. Так, например, для метода Эйлера необходимо оценить  $y''(t_i)$ . Для этого можно воспользоваться конечно-разностной аппроксимацией производной функции  $f(y,t)$ :

$$y''(t_i) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy(t_i)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (f(t_i, y_i)) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_i} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=t_i} = f(t_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{t=t_i} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=t_i},$$

где  $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{t=t_i} \approx \frac{f(t_i, y_i + \Delta y_i) - f(t_i, y_i)}{\Delta y_i}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=t_i} \approx \frac{f(t_i + \Delta t_i, y_i) - f(t_i, y_i)}{\Delta t_i}$ .

Шаг конечных разностей целесообразно выбирать так, чтобы внести возмущение примерно в половину разрядов мантиссы:

$$\Delta y_i = \sqrt{\varepsilon_{\text{маш}}} y_i; \quad \Delta t_i = \sqrt{\varepsilon_{\text{маш}}} t_i.$$

Другой способ оценки  $y''(t_i)$  состоит в использовании полученных значений  $y_{i-1}$ ,  $y_i$ ,  $y_{i+1}$ . Дважды дифференцируя интерполяционный полином Лагранжа, проходящий через точки  $(y_{i-1}, t_{i-1})$ ,  $(y_i, t_i)$ ,  $(y_{i+1}, t_{i+1})$  получим

$$y''(t_i) = 2 \left( \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} - \frac{y_i}{h_{i-1}h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i-1})} \right).$$

Иной способ оценки погрешности состоит в одновременном использовании двух методов разного порядка точности. Предположим, что используются два метода с порядками точности  $p$  и  $p+1$  соответственно. Можно показать, что в этом случае локальная погрешность решения задачи Коши может быть оценена как:

$$R_i = y_{i+1}^* - y_{i+1}, \quad (12)$$

где  $y_{i+1}^*$ ,  $y_{i+1}$  — решения, полученные методами с порядками точности  $p$  и  $p+1$  соответственно.

Следует иметь в виду, что если используемые методы различных порядков точности используют различные сетки узлов на элементарном отрезке, то применение (12) не имеет преимуществ по сравнению с правилом Рунге поскольку существенно не уменьшает числа обращений к функции  $f(y, t)$ . Поэтому важно использовать такие методы различных порядков, которые построены на одной и той же сетке узлов. Так, например, удобно использовать методы Рунге-Кутты 4 и 5 порядка, построенным по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + h_i(c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + c_5k_5 + c_6k_6) + O(h_i^6), \quad (13)$$

где

$$k_1 = f(t_i, y_i);$$

$$k_2 = f(t_i + a_2h_i, y_i + h_i b_{21}k_1);$$

$$k_3 = f(t_i + a_3h_i, y_i + h_i(b_{31}k_1 + b_{32}k_2));$$

$$k_4 = f(t_i + a_4h_i, y_i + h_i(b_{41}k_1 + b_{42}k_2 + b_{43}k_3));$$

$$k_5 = f(t_i + a_5h_i, y_i + h_i(b_{51}k_1 + b_{52}k_2 + b_{53}k_3 + b_{54}k_4));$$

$$k_6 = f(t_i + a_6h_i, y_i + h_i(b_{61}k_1 + b_{62}k_2 + b_{63}k_3 + b_{64}k_4 + b_{65}k_5)).$$

Коэффициенты  $b_{jl}$ ,  $a_j$  и  $c_j$  для методов Фелберга и Кеша-Карпа приведены в таблицах 1 и 2.

Как было показано выше, для вышеприведенных функций  $k_j$ ,  $j = \overline{1,6}$  могут быть найдены коэффициенты  $c_j^*$ ,  $j = \overline{1,6}$  приводящие к методу четвертого порядка, т.е.:

$$y_{i+1}^* = y_i + h_i(c_1^*k_1 + c_2^*k_2 + c_3^*k_3 + c_4^*k_4 + c_5^*k_5 + c_6^*k_6) + O(h_i^5).$$

Следует отметить, что на практике значение  $y_{i+1}^*$  не вычисляется, а погрешность на каждом шаге, как это вытекает из (12), оценивают из выражения:

$$R_i = h_i \sum_{j=1}^6 (c_j - c_j^*) k_j. \quad (14)$$

После оценки погрешности по одному из вышеприведенных способов, проверяется выполнение условия:

$$|R_i| \leq \varepsilon |y_{i+1}|. \quad (15)$$

Если оно не выполняется, то шаг уменьшают в два раза или в  $\sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon |y_{i+1}|}{|R_i|}}$  раз. Уменьшение шага выполняют до тех пор, пока не выполнится условие (15). После чего переходят к новому шагу. При этом новый шаг  $h_{i+1}$  выбирают по правилу зон:

$$h_{i+1} = \begin{cases} h_i, & \frac{\varepsilon}{q^{p+1}} \leq \frac{|R_i|}{|y_{i+1}|} \leq \varepsilon; \\ qh_i, & \frac{|R_i|}{|y_{i+1}|} < \frac{\varepsilon}{q^{p+1}}, \end{cases} \quad (16)$$

или из соотношения:

$$h_{i+1} = h_i \sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon |y_{i+1}|}{|R_i|}}. \quad (17)$$

При прогнозировании шага по правилу (17) шаг ближе к оптимальному, но общее число возвратов обычно больше, чем при использовании правила зон (16).

Следует отметить, что для интегрирования дифференциальных уравнений с быстро меняющимися функциями  $f(t,y)$  следует ограничивать шаг интегрирования заданной величиной  $h_{\max}$ .

### *Рабочее задание*

1. Построить алгоритмы численного решения задачи Коши явным, неявным методом Эйлера и методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования для достижения заданной локальной относительной погрешности  $\varepsilon$  либо локальной абсолютной погрешности  $\Delta$ . Апостериорную оценку погрешности для явного метода Эйлера провести по правилу Рунге либо по оценке производной, входящей в выражение для погрешности. Для неявного метода Эйлера погрешность следует оценивать по формуле (11), а для метода Рунге-Кутты по формуле (14).
2. Составить рабочую программу с использованием универсальных функций численного решения задачи Коши. Минимальный набор параметров функции решения задачи Коши должен включать: имя функции, вычисляющей производную неизвестной функции (правую часть дифференциального уравнения); интервал времени, на котором нужно найти решение; начальное условие; погрешность решения; массив временных отсчетов, в которых найдено решение; массив решений; максимальное число временных отсчетов; количество фактически полученных временных отсчетов, в которых найдены решения с заданной погрешностью.

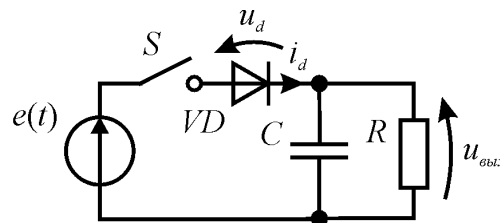
3. Набрать и отладить программу на компьютере. Отладку осуществить с использованием в качестве  $f(t,y)$  функции, для которой известно аналитическое решение.
4. Выбрать задачу в соответствии с вариантом. Для заданной схемы сформулировать задачу Коши.
5. Провести решение задачи Коши, полученной в пункте 4 рабочего задания, каждым методом с подсчетом числа элементарных отрезков, необходимых для достижения заданной погрешности, и требуемого числа обращений к функции  $f(t,y)$ .
6. Сравнить различные методы по эффективности.

### Содержание отчета

1. Название работы
2. Цель
3. Рабочее задание
4. Математические формулировки алгоритмов решения задачи Коши.
5. Решаемое уравнение.
6. Текст рабочей программы.
7. Результаты расчетов с подсчетом числа необходимых разбиений заданного отрезка на элементарные и количества вызовов функции  $f(y,t)$  для каждого из методов, график решения и входного воздействия в одной системе координат.
8. Выводы.

### Задачи

1. Найти напряжение  $u_{вых}$  в течение времени  $t \in [0, t_{end}]$  для схемы, приведенной на рисунке, если переключатель  $S$  был разомкнут в течение времени  $t \in [-\infty, 0]$ , а в момент времени  $t = 0$  замыкается.



Учсть, что ток  $i_d$ , протекающий через диод связан с напряжением  $u_d$  зависимостью:

$$i_d = i_0 \left( \exp \left( \frac{u_d}{m\phi_T} \right) - 1 \right),$$

где  $i_0$  — обратный ток диода,  $\varphi_T$  — тепловой потенциал,  $m$  — коэффициент неидеальности диода. Зависимость  $e(t)$  имеет вид:

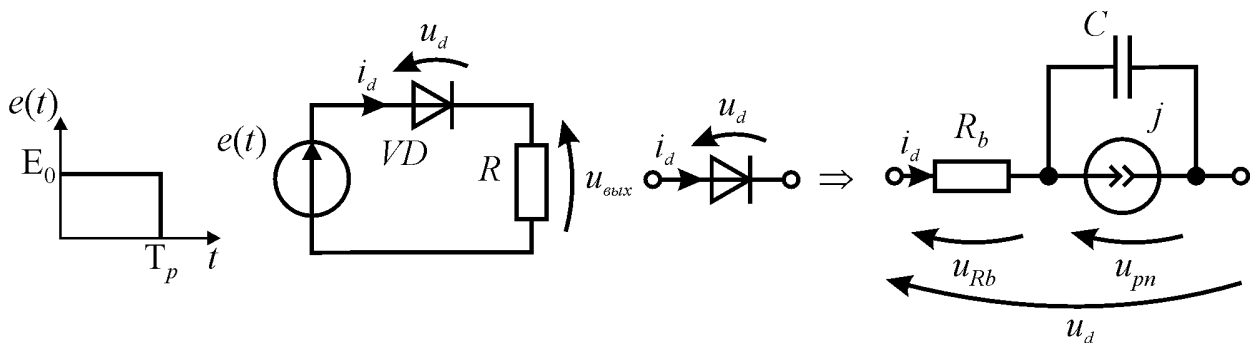
$$e(t) = E_0 \sin(2\pi ft + \varphi),$$

где  $E_0$  — амплитуда,  $f$  — частота,  $\varphi$  — фаза напряжения источника.

Значения параметров напряжения источника  $E_0$ ,  $f$  и  $\varphi$ , сопротивления резистора  $R$ , емкость конденсатора  $C$ , параметры диода и время  $t_{end}$  выбрать из таблицы в соответствии с вариантом:

№ варианта	$E_0$ , В	$f$ , $10^3$ Гц	$\varphi$	$R$ , $10^3$ Ом	$C$ , $10^{-6}$ Ф	$i_0$ , $10^{-12}$ А	$m$	$\varphi_T$ , $10^{-3}$ В	$t_{end}$ , $10^{-3}$ с
1	5	1	$\pi/4$	5	1	3000	1.7	26	3
2	10	6	$6\pi/5$	1.8	0.5	1	1.8	26	0.5
3	15	3	$-\pi/8$	0.8	2	10	1.6	26	1
4	3	2	$\pi/3$	0.2	5	100	1.9	26	1.5

2. Найти напряжение на диоде  $u_d$  для схемы, приведенной на рисунке. Для этого заменить диод его эквивалентной схемой, приведенной на рисунке.



Учесть, что ток источника  $j$  описывается уравнением:

$$j = i_0 \left( \exp\left(\frac{u_{pn}}{m\varphi_T}\right) - 1 \right),$$

где  $i_0$  — обратный ток диода,  $\varphi_T$  — тепловой потенциал,  $m$  — коэффициент неидеальности диода.

Сопротивление базы диода  $R_b$  зависит от тока:

$$R_b = \frac{R_{b0}}{1 + \frac{j}{I_v}},$$

где  $R_{b0}$  — немодулированное сопротивление базы диода,  $I_v$  — ток перехода от низких к высоким уровням инжекции.

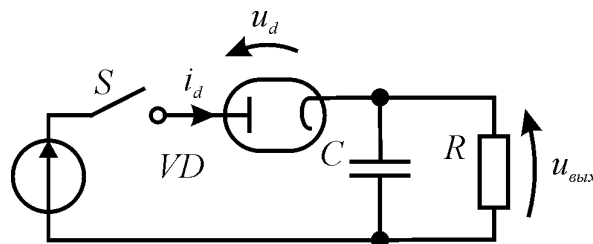
Зависимость входного воздействия  $e(t)$  показана на рисунке.



Значения параметров напряжения источника  $E_0$ ,  $T_p$ , сопротивления резистора  $R$ , барьерная емкость диода  $C$ , параметры диода и время  $t_{end}$  выбрать из таблицы в соответствии с вариантом:

№ варианта	$E_0$ , В	$T_p$ , $10^{-6}$ с	$R$ , $10^3$ Ом	$C$ , $10^{-9}$ Ф	$i_0$ , $10^{-12}$ А	$m$	$\varphi_T$ , $10^{-3}$ В	$R_{b0}$ , $10^3$ Ом	$I_v$ , $10^{-3}$ А	$t_{end}$ , $10^{-6}$ с
1	5	1	1	2	5000	1.7	26	1	0.3	5
2	10	2	4	1.6	300	1.8	26	3	0.1	10
3	15	1.5	6	2	100	1.6	26	0.8	0.5	9
4	8	1	1	2.5	50	1.9	26	1.8	0.1	6

3. Найти напряжение  $u_{вых}$  в течение времени  $t \in [0, t_{end}]$  для схемы, приведенной на рисунке, если переключатель  $S$  был разомкнут в течение времени  $t \in [-\infty, 0]$ , а в момент времени  $t=0$  замыкается.



Учсть, что ток  $i_d$ , протекающий через диод связан с напряжением  $u_d$  зависимостью:

$$i_d = \begin{cases} g u_d^{\frac{3}{2}}, & u_d \geq 0, \\ 0, & u_d < 0 \end{cases}$$

где  $g$  — первеанс диода. Зависимость  $e(t)$  имеет вид:

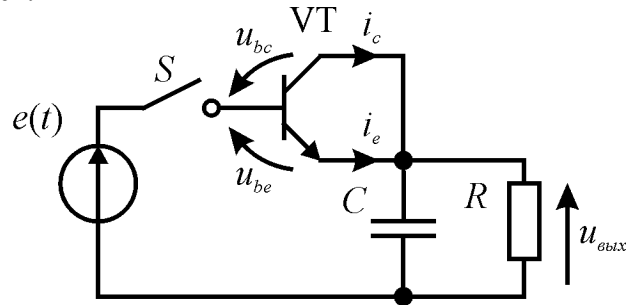
$$e(t) = E_0 \sin(2\pi f t + \varphi),$$

где  $E_0$  — амплитуда,  $f$  — частота,  $\varphi$  - фаза напряжения источника.

Значения параметров напряжения источника  $E_0$ ,  $f$  и  $\varphi$ , сопротивления резистора  $R$ , емкость конденсатора  $C$ , параметры диода и время  $t_{end}$  выбрать из таблицы в соответствии с вариантом:

№ варианта	$E_0$ , В	$f$ , $10^3$ Гц	$\varphi$	$R$ , $10^3$ Ом	$C$ , $10^{-6}$ Ф	$g$ , $10^{-3}$ А/В <sup>3/2</sup>	$t_{end}$ , $10^{-3}$ с
1	50	1	$\pi/4$	4	1	0.8	4
2	100	5	$\pi/3$	3	0.4	1	0.6
3	150	3	$-\pi/8$	0.8	2	3	1
4	200	2	$-\pi/4$	1.2	4	8	1.5

4. Найти напряжение  $u_{\text{вых}}$  в течение времени  $t \in [0, t_{\text{end}}]$  для схемы, приведенной на рисунке, если переключатель S был разомкнут в течение времени  $t \in [-\infty, 0]$ , а в момент времени  $t=0$  замыкается.



Учтеть, что токи эмиттера  $i_e$  и коллектора  $i_c$  связаны с напряжениями  $u_{be}$  и  $u_{bc}$  зависимостями:

$$i_e = i_{e0} \left( \exp\left(\frac{u_{be}}{m_e \phi_T}\right) - 1 \right),$$

$$i_c = i_{c0} \left( \exp\left(\frac{u_{bc}}{m_c \phi_T}\right) - 1 \right),$$

где  $i_{e0}$  — обратный ток эмиттерного перехода транзистора,  $\phi_T$  — тепловой потенциал,  $m_e$  — коэффициент неидеальности эмиттерного перехода транзистора,  $i_{c0}$  — обратный ток коллекторного перехода транзистора,  $m_c$  — коэффициент неидеальности коллекторного перехода транзистора. Зависимость  $e(t)$  имеет вид:

$$e(t) = E_0 \sin(2\pi ft + \varphi),$$

где  $E_0$  — амплитуда,  $f$  — частота,  $\varphi$  — фаза напряжения источника.

Значения параметров напряжения источника  $E_0$ ,  $f$  и  $\varphi$ , сопротивления резистора R, емкость конденсатора C, параметры транзистора и время  $t_{\text{end}}$  выбрать из таблицы в соответствии с вариантом:

№ варианта	$E_0$ , В	$f$ , $10^3$ Гц	$\varphi$	R, $10^3$ Ом	C, $10^{-6}$ Ф	$I_{e0}$ , $10^{-12}$ А	$m_e$	$I_{c0}$ , $10^{-12}$ А	$m_c$	$\phi_T$ , $10^{-3}$ В	$t_{\text{end}}$ , $10^{-3}$ с
1	5	1	$\pi/8$	4	1	1	1.7	6	1.8	26	3
2	10	5	$-\pi/6$	1	0.8	5	1.6	25	1.8	26	0.6
3	15	4	$-\pi/8$	1.5	0.5	10	1.7	70	1.9	26	0.75
4	3	2	$\pi/4$	0.2	5	20	1.9	80	1.8	26	1.5

*Варианты заданий*

Номер бригады	Номер задачи	Номер варианта задачи
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1
5	1	2
6	2	2
7	3	2
8	4	2
9	1	3
10	2	3
11	3	3
12	4	3
13	1	4
14	2	4
15	3	4
16	4	4