Лабораторная работа № 5

Численное решение систем нелинейных уравнений

Цель работы: получение практических навыков построения алгоритмов решения систем нелинейных уравнений, программной реализации их на компьютере, оценки погрешности решения, сравнение эффективности различных методов.

Краткие теоретические сведения

Систему нелинейных уравнений можно представить в векторной форме

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$-вектор неизвестных, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \ldots, f_n(\mathbf{X})]^T$-вектор функций.

Метод Ньютона основан на замене вектора функций его линейной моделью в окрестности k-го приближения к корню $\mathbf{X}_k$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k), \qquad (2)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{X}_k) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{X}_k)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{X}_k)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{X}_k)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{X}_k)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{X}_k)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{X}_k)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{X}_k)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{X}_k)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{X}_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$-матрица Якоби.

Тогда из (1) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно k+1 приближения к корню:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k) = 0\,. \qquad (3)$$

Таким образом алгоритм решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона сводится к следующим шагам:

1. Для заданного или ранее найденного приближения к корню $\mathbf{X}_k$ вычислить вектор функций $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)$ и матрицу Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)$.
2. Решить систему линейных алгебраических уравнений $\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)\Delta\mathbf{X}_k = -\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)$.
3. Найти новое приближение к корню $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \Delta\mathbf{X}_k$.
4. Проверить критерий окончания итераций. Если не выполняется присвоить вектору $\mathbf{X}_k$ значение $\mathbf{X}_{k+1}$ и перейти к шагу 1.

К недостатку метода Ньютона следует отнести необходимость аналитического задания частных производных нелинейных функций, входящих в систему. Этого недостатка лишены квазиньютоновские методы. В них матрица Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)$ аппроксимируется матрицей $\mathbf{J}_k$. В методе конечно-разностной аппроксимации каждый элемент матрицы Якоби заменяется конечно-разностным выражением

$$\frac{\partial f_j(\mathbf{X}_k)}{\partial x_i} \approx \frac{f_j(\mathbf{X}_k + \mathbf{I}h_i) - f_j(\mathbf{X}_k)}{h_i}\ , \qquad (4)$$

где $\mathbf{I}$-вектор, i-й элемент которого равен 1, а все остальные элементы равны 0. Для правильного выбора шага аппроксимации h_i необходимо учитывать, что его уменьшение приводит к уменьшению погрешности аппроксимации, но увеличивает вычислительную погрешность. Поэтому на практике его выбирают исходя из разумного компромисса как:

$$h_i = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon_{маш}}\, x_i, & \sqrt{\varepsilon_{маш}}\, x_i \neq 0 \\ \sqrt{\varepsilon_{маш}}\ \text{type}\, x_i, & \sqrt{\varepsilon_{маш}}\, x_i = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

где $\varepsilon_{маш}$ -относительная погрешность округления вещественных чисел (в языке Pascal для типа real $\varepsilon_{маш} \approx 10^{-12}$), type x_i - типичное значение переменной x_i.

Алгоритм решения системы нелинейных уравнений методом конечно-разностной аппроксимации матрицы Якоби аналогичен алгоритму для метода Ньютона.

В методах секущих на каждом итерационном шаге аппроксимация матрицы Якоби пересчитывается по формуле

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{J}_k + \frac{\mathbf{F}_{k+1}\mathbf{G}_k^T}{\mathbf{G}_k^T \Delta\mathbf{X}_k}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{F}_{k+1}=\mathbf{F}(\mathbf{X}_{k+1})$, $\Delta\mathbf{X}_k=\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}$, $\mathbf{G}_k$- n-мерный вектор, зависящий от конкретного метода и удовлетворяющий условию:

$$\left\| \frac{\Delta\mathbf{X}_k \mathbf{G}_k^T}{\mathbf{G}_k^T \Delta\mathbf{X}_k} \right\| \le 1,$$

где $\| \ \|$- норма матрицы.

В зависимости от выбора вектора $\mathbf{G}_k$ среди методов секущих можно выделить:

1. $\mathbf{G}_k = \Delta\mathbf{X}_k$ - метод Бройдена;
2. $\mathbf{G}_k = \mathbf{J}_k^T \Delta\mathbf{F}_k$ - модифицированный метод Бройдена;
3. $\mathbf{G}_k = \Delta\mathbf{F}_k$ - метод Пирсона;
4. $\mathbf{G}_k = \Delta\mathbf{F}_k - \mathbf{J}_k^T \Delta\mathbf{X}_k$ - симметричный метод первого ранга.

Поскольку к первому шагу алгоритма метода секущих уже требуется аппроксимация матрицы Якоби, то на практике в самом начале для вычисления $\mathbf{J}_0$ единственный раз используют конечно-разностную аппроксимацию.

Таким образом алгоритм решения системы нелинейных уравнений методом секущих сводится к следующим шагам:

1. Для заданного приближения к корню $\mathbf{X}_0$ вычислить вектор функций $\mathbf{F}_0=\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$ и аппроксимацию матрицы Якоби $\mathbf{J}_0$. Положить k=0.
2. Решить систему линейных алгебраических уравнений $\mathbf{J}_k \Delta\mathbf{X}_k = -\mathbf{F}_k$.
3. Найти новое приближение к корню $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \Delta\mathbf{X}_k$.
4. Вычислить $\mathbf{F}_{k+1}=\mathbf{F}(\mathbf{X}_{k+1})$
5. Вычислить новую аппроксимацию матрицы Якоби $\mathbf{J}_{k+1}$ по формуле (6).
6. Проверить критерий окончания итераций. Если не выполняется присвоить вектору $\mathbf{X}_k$ значение $\mathbf{X}_{k+1}$, вектору $\mathbf{F}_k$ значение $\mathbf{F}_{k+1}$, вектору $\mathbf{J}_k$ значение $\mathbf{J}_{k+1}$ и перейти к шагу 2.

При написании программы, реализующей выше приведенные алгоритмы, следует иметь ввиду, что индекс k, присутствующий в формулах, можно не использовать.

В качестве критерия окончания итераций чаще всего используют условие

$$\frac{\|\Delta\mathbf{X}_k\|}{\|\mathbf{X}_{k+1}\|} < \varepsilon,$$

где $\| \ \|$-векторная норма, ε- заданная относительная погрешность решения.

Рабочее задание

1. В соответствии с вариантом для заданной схемотехнической задачи получить систему нелинейных уравнений, связывающую искомые токи и напряжения с параметрами компонентов схемы. Для этого используются стандартные методы теории цепей.
2. Построить алгоритмы решения нелинейных уравнений методом Ньютона, квазиньютоновскими методами конечно-разностной аппроксимации матрицы Якоби и секущих.
3. Составить рабочую программу для решения системы уравнения каждым методом с относительной погрешностью ε вычисления корней $1 \cdot 10^{-6}$. Каждый метод должен быть оформлен в виде отдельной универсальной функции. Формальные параметры функции должны включать: имя процедуры или функции, реализующей вычисление **F**(**X**); количество уравнений; относительную погрешность вычисления корня; начальное приближение; решение уравнения (возвращаемый параметр). В программе предусмотреть возможность подсчета числа вызовов функций.

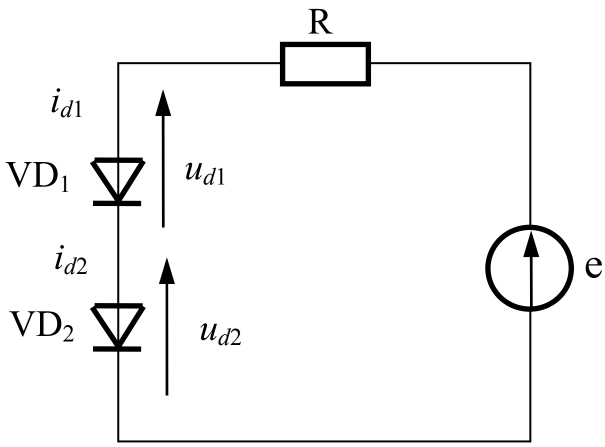
   При написании процедур, реализующих вычисление функций, входящих в систему нелинейных уравнений, необходимо учесть, что функции должны содержать все параметры схемы в виде именованных констант или переменных.
4. Набить и отладить программу на компьютере, заменив заданную систему нелинейных уравнений системой линейных уравнений с известным решением.
5. Для системы нелинейных уравнений, полученной в п.1 получить и записать значения и аргументы функций, входящих в систему на каждом итерационном шаге алгоритмов.
6. Сравнить различные методы по скорости сходимости, надежности, требуемым машинным ресурсам (объем оперативной памяти, количеству арифметических операций, времени выполнения).

Содержание отчета

1. Название работы.
2. Цель.
3. Электрическую схему, соответствующую варианту, и полученную систему нелинейных уравнений относительно неизвестных напряжений или токов.
4. Рабочее задание.
5. Математические формулировки используемых алгоритмов решения системы нелинейных уравнений каждым методом.
6. Листинг рабочей программы.
7. Результаты расчетов.
8. Выводы.

Задачи

1. Найти напряжение на диодах u_{d1} и u_{d2} для схемы, приведенной на рисунке. Применить законы Кирхгофа и учесть, что ток i_{dk}, протекающий через k-й диод связан с напряжением на нем u_{dk} зависимостью $i_{dk} = i_{0k}\left(\exp\left(\dfrac{u_{dk}}{m_k \varphi_T}\right) - 1\right)$, где i_{0k} - обратный ток k-го диода, φ_T - тепловой потенциал, m_k - коэффициент неидеальности k-го диода.



Значения напряжения источника e, сопротивления резистора R, и параметры диодов выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

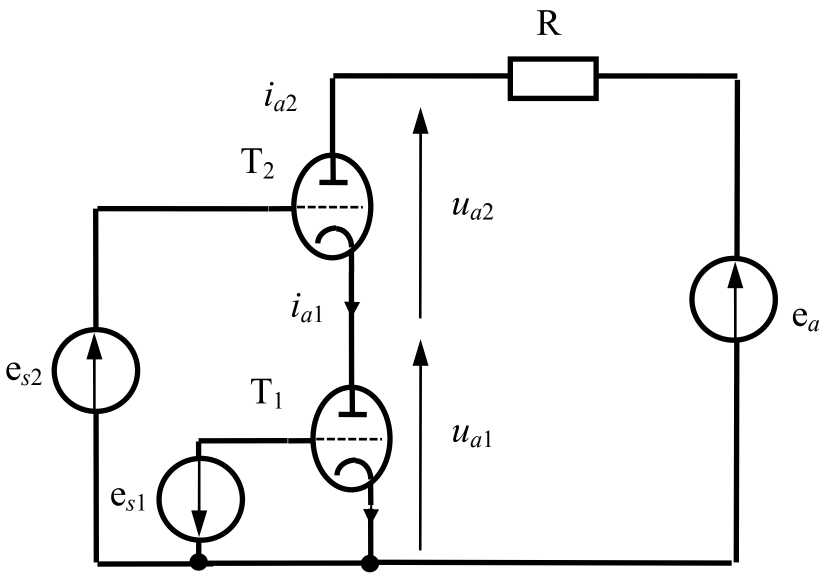
№ варианта	e,В	R, 10^3 Ом	i_{01}, 10^{-9}А	i_{02}, 10^{-9}А	m_1	m_2	φ_T, 10^{-3}В
1	6	1.5	2	5	1.5	1.7	26
2	5	0.4	10	2	2	1.8	26
3	10	1	8	20	1.2	1.6	26

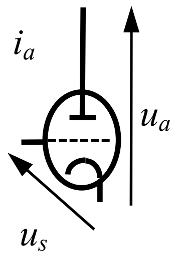
2. Найти напряжение на триодах u_{a1} и u_{a2} для схемы, приведенной на рисунке. Применить законы Кирхгофа и учесть, что ток i_a, протекающий через триод связан с напряжениями u_a и u_s зависимостью

$$i_a = \begin{cases} 0, & u_s + Du_a \le 0 \\ g\left(\dfrac{u_s + Du_a}{1+\chi D}\right)^{\frac{3}{2}}, & u_s + Du_a > 0 \end{cases},$$

где g - первеанс триода, D - проницаемость триода, χ-коэффициент, зависящий от соотношения расстояний анод-катод и сетка анод.

Током сеток пренебречь.





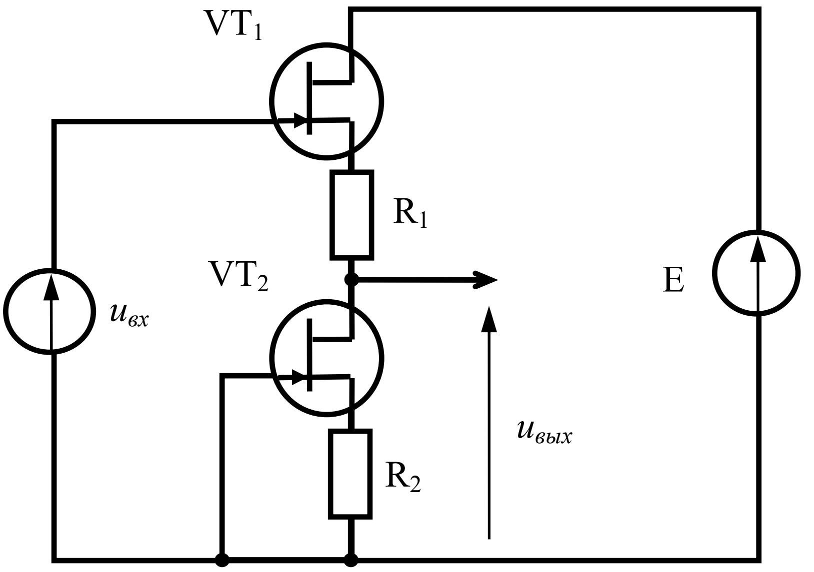
Значения напряжений источников e_s, e_a, сопротивления резистора R, и параметры триода выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

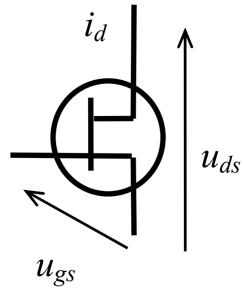
№ варианта	e_a, В	e_{s1}, В	e_{s2}, В	R, 10^3 Ом	g, 10^{-4}А/В$^{3/2}$		χ		D	
					T_1	T_2	T_1	T_2	T_1	T_2
1	250	2	100	100	1	5	3	4	0.05	0.03
2	200	3	70	50	10	2	3.5	4	0.05	0.01
3	300	2.5	120	70	3	4	4	5	0.02	0.07

3. Найти напряжение $u_{вых}$ для схемы, приведенной на рисунке. Применить законы Кирхгофа и учесть, что ток стока i_d полевого транзистора с управляющим *p-n* переходом связан с напряжением u_{ds} зависимостью

$$i_d = \begin{cases} g_{22}u_{ds}, & u_{gs} \le u_0 \\ \beta\left(-2\left(u_{gs}+u_0\right)+u_{ds}\right)u_{ds}+g_{22}u_{ds}, & u_{gs} > u_0, u_{ds} < -\left(u_{gs}+u_0\right), \\ -\beta\left(u_{gs}+u_0\right)^2+g_{22}u_{ds}, & u_{gs} > u_0, u_{ds} \ge -\left(u_{gs}+u_0\right) \end{cases}$$

где β - удельная крутизна транзистора, g_{22} - выходная проводимость транзистора, u_0- напряжение отсечки.

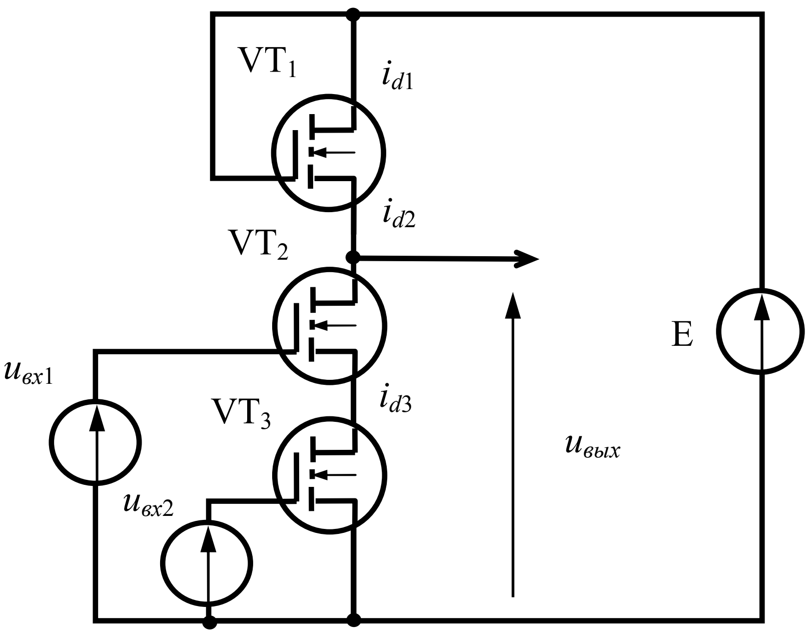


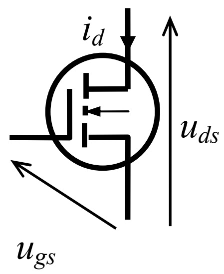


Значения напряжений источников E и $u_{вх}$, сопротивлений резисторов R_1 и R_2, и параметров транзисторов выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	E, В	$u_{вх}$, В	R_1, 10^3Ом	R_2, 10^3Ом	u_0, В		β, 10^{-4}А/В^2		g_{22}, 10^{-5}См	
					VT_1	VT_2	VT_1	VT_2	VT_1	VT_2
1	10	2	2	0.1	-3	-4	2	4	2	1
2	5	3	1	0.6	-5	-2	0.8	5	10	2
3	7.5	5	6	1	-2	-3	1	2	4	6

4. Найти напряжение $u_{вых}$ для схемы, приведенной на рисунке.





Применить законы Кирхгофа и учесть, что ток стока МОП-транзистора i_d связан с напряжением u_{ds} зависимостью

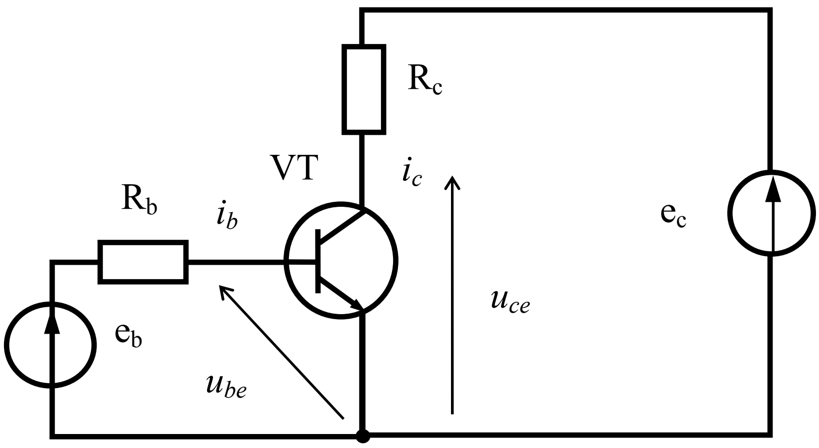
$$i_d = \begin{cases} g_{22}u_{ds}, & u_{gs} \le u_0 \\ \beta\left(2\left(u_{gs}-u_0\right)-u_{ds}\right)u_{ds}+g_{22}u_{ds}, & u_{gs}>u_0, u_{ds}<\left(u_{gs}-u_0\right), \\ \beta\left(u_{gs}-u_0\right)^2+g_{22}u_{ds}, & u_{gs}>u_0, u_{ds}\ge\left(u_{gs}-u_0\right) \end{cases}$$

где β - удельная крутизна транзистора, g_{22} - выходная проводимость транзистора, u_0 - пороговое напряжение.

Значения напряжений источников E, $u_{вх1}$, $u_{вх2}$ и параметров транзисторов выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	E, В	$u_{вх1}$, В	$u_{вх2}$, В	u_0, В			β, 10^{-4} А/В^2			g_{22}, 10^{-4} См		
				VT_1	VT_2	VT_3	VT_1	VT_2	VT_3	VT_1	VT_2	VT_3
1	9	4	10	3	2.5	2	2	2	4	2	1	4
2	8	5	12	2	2.5	1.5	10	8	2	4	6	2
3	12	4	15	3	3.5	3	5	1	4	5	1	8

5. Найти напряжения u_{be} и u_{ce} на биполярном транзисторе для схемы, приведенной на рисунке. Применить законы Кирхгофа и учесть, что токи транзистора связаны с напряжениями u_{be} и u_{ce} зависимостями $i_e = i_{e0}\left(\exp\left(\dfrac{u_{be}+h_{12}u_{ce}}{m_e\varphi_T}\right)-1\right)$, $i_c = \alpha i_e - i_{c0}\left(\exp\left(\dfrac{u_{be}-u_{ce}}{m_c\varphi_T}\right)-1\right)$, $i_b = i_e - i_c$, где i_{e0} - обратный ток эмиттерного перехода транзистора, i_{c0} - обратный ток коллекторного перехода транзистора, α-коэффициент передачи тока эмиттера, φ_T - тепловой потенциал, m_e - коэффициент неидеальности эмиттерного перехода транзистора, m_c - коэффициент неидеальности коллекторного перехода транзистора h_{12} - коэффициент обратной связи.



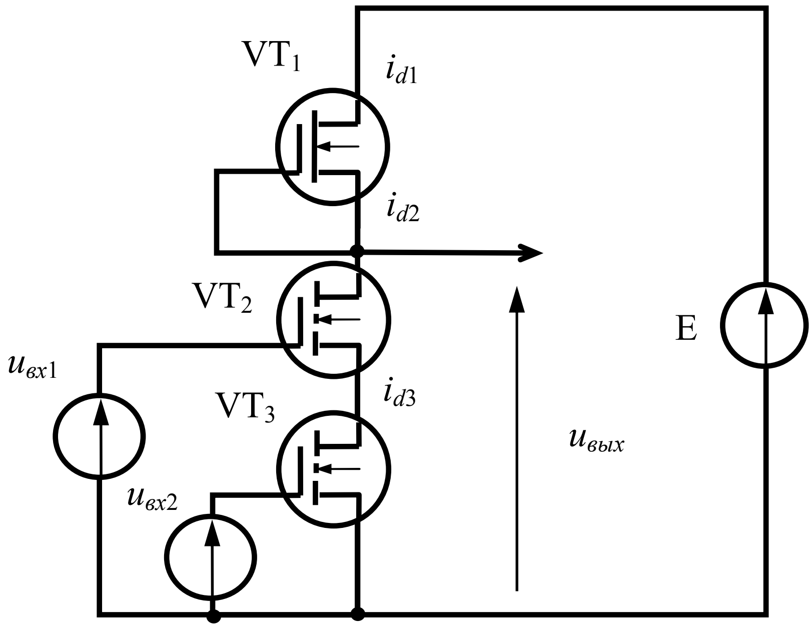
Значения напряжений источников e_b и e_c, сопротивлений резисторов R_b и R_c и параметров транзистора выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

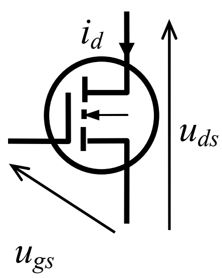
№ варианта	e_b, В	e_c, В	R_b, 10^3 Ом	R_c, 10^2 Ом	i_{e0}, 10^{-9}А	m_e	i_{c0}, 10^{-9}А	m_c	φ_T, 10^{-3}В	α	h_{12}, 10^{-3}
1	4	10	5	1	1	1.01	1.5	1.5	26	0.98	2
2	5	12	4	1.5	2	1.05	2.8	1.4	26	0.99	1
3	6	15	7	2	2.5	1.06	4	1.6	26	0.99	1.5

6. Найти напряжение $u_{вых}$ для схемы, приведенной на рисунке. Применить законы Кирхгофа и учесть, что ток стока МОП-транзистора i_d связан с напряжением u_{ds} зависимостью

$$i_d = \begin{cases} g_{22} u_{ds}, & u_{gs} \le u_0 \\ \beta\left(2\left(u_{gs} - u_0\right) - u_{ds}\right) u_{ds} + g_{22} u_{ds}, & u_{gs} > u_0, u_{ds} < \left(u_{gs} - u_0\right), \\ \beta\left(u_{gs} - u_0\right)^2 + g_{22} u_{ds}, & u_{gs} > u_0, u_{ds} \ge \left(u_{gs} - u_0\right) \end{cases}$$

где β - удельная крутизна транзистора, g_{22} - выходная проводимость транзистора, u_0 - пороговое напряжение.

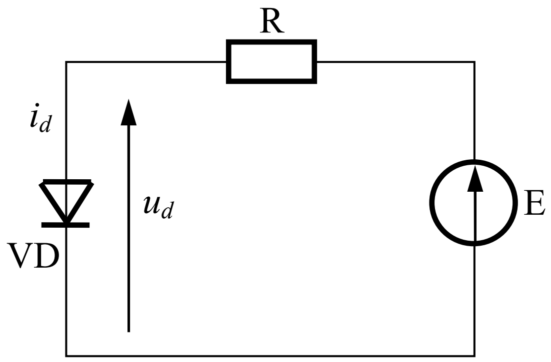




Значения напряжений источников E, $u_{вх1}$, $u_{вх2}$ и параметров транзисторов выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	E, В	$u_{вх1}$, В	$u_{вх2}$, В	u_0, В			β, 10^{-4}А/В^2			g_{22}, 10^{-4} См		
				VT$_1$	VT$_2$	VT$_3$	VT$_1$	VT$_2$	VT$_3$	VT$_1$	VT$_2$	VT$_3$
1	8	4	6	-1	2	3	1	2	3	0.4	0.1	0.6
2	10	5	7	-2	3	2	1	0.1	0.8	0.1	0.05	0.1
3	12	6	8	-1.5	2.5	3	2	1	1	0.5	0.2	0.8

7. Найти напряжение на диоде u_d для схемы, приведенной на рисунке. Применить законы Кирхгофа и учесть, что ток i_d, протекающий через диод связан с напряжением u_d зависимостью $i_d = i_0\left(\exp\left(\frac{u_d - i_d r_b}{m\varphi_T}\right) - 1\right)$, где i_0 - обратный ток диода, φ_T - тепловой потенциал, m - коэффициент неидеальности диода, а сопротивление базы диода связано с током диода i_d зависимостью: $r_b = \frac{r_{b0}}{1 + \frac{i_d}{i_\nu}}$, r_{b0} - сопротивление базы диода в равновесном состоянии, i_ν- ток, соответствующий переходу к высоким уровням инжекции. Задачу решать как систему из двух уравнений.



Значения напряжения источника E, сопротивления резистора R, и параметры диода выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	E, В	R, 10^3 Ом	i_0, 10^{-9}A	r_{b0}, 10^3 Ом	i_ν, 10^{-3}A	m	φ_T, 10^{-3}В
1	5	4	10	2	1	1.5	26
2	7	2	1	0.5	0.3	2	26
3	10	8	5	10	3	1.8	26

Варианты заданий

Номер бригады	Номер задачи	Номер варианта задачи
1	2	1
2	3	1
3	4	1
4	5	1
5	6	1
6	7	1
7	1	1
8	2	2
9	3	2
10	4	2
11	5	2
12	6	2
13	7	2
14	1	2
15	3	3
16	4	3