

Лабораторна робота № 5. Чисельне рішення систем нелінійних рівнянь

Мета роботи: отримання практичних навичок побудови алгоритмів рішення систем нелінійних рівнянь, їх програмної реалізації на комп'ютері, оцінки похибки рішення, порівняння ефективності різних методів.

Короткі теоретичні відомості

Систему нелінійних рівнянь можна подати у векторній формі:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0, \quad (1)$$

де $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ - вектор невідомих, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})]^T$ - вектор функцій.

Метод Ньютона ґрунтується на заміні вектора функцій його лінійною моделлю в околиці k -го наближення до кореня \mathbf{X}_k :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k), \quad (2)$$

$$\text{де } \mathbf{J}(\mathbf{X}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{X}_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{X}_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{X}_k)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{X}_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{X}_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{X}_k)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{X}_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{X}_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{X}_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ - матриця Якобі.}$$

Тоді із (1) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $k+1$ наближення до кореня:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k) = 0. \quad (3)$$

Таким чином, алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона зводиться до таких кроків:

1. Для заданого або раніш знайденого наближення до кореня \mathbf{X}_k обчислити вектор функцій $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)$ і матрицю Якобі $\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)$.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)\Delta\mathbf{X}_k = -\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)$.
3. Знайти нове наближення до кореня $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \Delta\mathbf{X}_k$.
4. Перевірити критерій закінчення ітерацій. Якщо не виконується, присвоїти вектору \mathbf{X}_k значення \mathbf{X}_{k+1} і перейти до кроку 1.

До недоліків метода Ньютона треба віднести необхідність аналітичного задання часткових похідних нелінійних функцій, що входять в систему. Цього недоліку позбавлені квазіньютонівські методи. В них матриця Якобі $\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)$ апроксимується матрицею \mathbf{J}_k . В методі скінчено-різницевої апроксимації кожний елемент матриці Якобі замінюється скінчено-різницевим виразом:

$$\frac{\partial f_j(\mathbf{X}_k)}{\partial x_i} \approx \frac{f_j(\mathbf{X}_k + \mathbf{I}h_i) - f_j(\mathbf{X}_k)}{h_i}, \quad (4)$$

де \mathbf{I} -вектор, i -й елемент якого дорівнює 1, а всі інші елементи дорівнюють 0. Для правильного вибору кроку апроксимації h_i необхідно враховувати, що його зменшення призводить до зменшення похибки апроксимації, але збільшує обчислювальну похибку. Тому на практиці його вибирають виходячи із розумного компромісу такого як:

$$h_i = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon_{\text{max}}} x_i, & \sqrt{\varepsilon_{\text{max}}} x_i \neq 0 \\ \sqrt{\varepsilon_{\text{max}}} \text{ type } x_i, & \sqrt{\varepsilon_{\text{max}}} x_i = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

де ε_{max} - відносна похибка округлення дійсних чисел (у мові C для типу float $\varepsilon_{\text{max}} \approx 1,2 \cdot 10^{-7}$), type x_i - типові значення змінної x_i .

Алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь методом скінчено-різницевої апроксимації матриці Якобі аналогічний алгоритму для методу Ньютона.

В методах січних на кожному ітераційному кроці апроксимація матриці Якобі обчислюється за формулою:

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{J}_k + \frac{\mathbf{F}_{k+1} \mathbf{G}_k^T}{\mathbf{G}_k^T \Delta \mathbf{X}_k}, \quad (6)$$

де $\mathbf{F}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{k+1})$, $\Delta \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}$, \mathbf{G}_k - n -мірний вектор, який залежить від конкретного методу і задовольняє умові:

$$\left\| \frac{\Delta \mathbf{X}_k \mathbf{G}_k^T}{\mathbf{G}_k^T \Delta \mathbf{X}_k} \right\| \leq 1,$$

де $\| \cdot \|$ - норма матриці.

В залежності від вибору вектора \mathbf{G}_k серед методів січних можна виділити:

1. $\mathbf{G}_k = \Delta \mathbf{X}_k$ - метод Бroyдена;
2. $\mathbf{G}_k = \mathbf{J}_k^T \Delta \mathbf{F}_k$ - модифікований метод Бroyдена;
3. $\mathbf{G}_k = \Delta \mathbf{F}_k$ - метод Пірсона;
4. $\mathbf{G}_k = \Delta \mathbf{F}_k - \mathbf{J}_k^T \Delta \mathbf{X}_k$ - симетричний метод першого рангу.

Оскільки до першого кроку алгоритму метода січних вже потрібна апроксимація матриці Якобі, то на практиці на самому початку для обчислення \mathbf{J}_0 єдиний раз використовують скінчено-різницева апроксимацію.

Таким чином, алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь методом січних зводиться до таких кроків:

1. Для заданого наближення до кореня \mathbf{X}_0 обчислити вектор функцій $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$ і апроксимацію матриці Якобі \mathbf{J}_0 . Задати $k=0$.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\mathbf{J}_k \Delta \mathbf{X}_k = -\mathbf{F}_k$.
3. Знайти нове наближення до кореня $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \Delta \mathbf{X}_k$.
4. Обчислити $\mathbf{F}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{k+1})$
5. Обчислити нову апроксимацію матриці Якобі \mathbf{J}_{k+1} за формулою (6).
6. Перевірити критерій закінчення ітерацій. Якщо не виконується, - присвоїти вектору \mathbf{X}_k значення \mathbf{X}_{k+1} , вектору \mathbf{F}_k значення \mathbf{F}_{k+1} , вектору \mathbf{J}_k значення \mathbf{J}_{k+1} і перейти до кроку 2.

При складанні програм, що реалізують наведені алгоритми, слід мати на увазі, що індекс k , який присутній в формулах, можна не використовувати.

Критерієм закінчення ітерацій найчастіше буває умова

$$\frac{\| \Delta \mathbf{X}_k \|}{\| \mathbf{X}_{k+1} \|} < \varepsilon,$$

де $\| \cdot \|$ - векторна норма, ε - задана відносна похибка розв'язку.

Робоче завдання

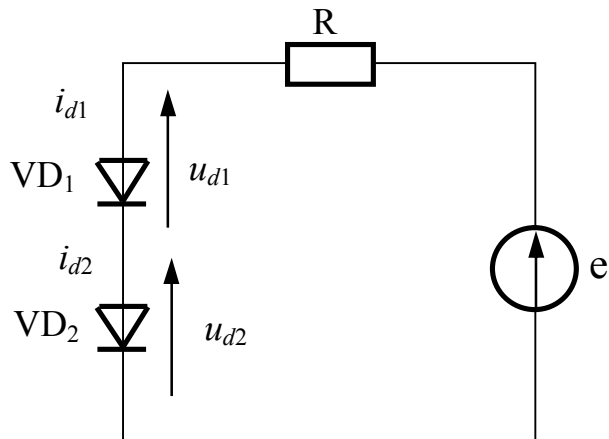
1. У відповідності до варіанта для заданої схемо-технічної задачі отримати систему нелінійних рівнянь, що пов'язують шукані струми і напруги із параметрами компонентів схеми. Для цього використовуються стандартні методи теорії кіл.
2. Побудувати алгоритми розв'язання нелінійних рівнянь квазі-ньютонівськими методами скінчено-різницевої апроксимації матриці Якобі і січних.
3. Скласти робочу програму для розв'язання системи рівнянь кожним методом із відносною похибкою ϵ обчислення коренів $1 \cdot 10^{-6}$. Кожен метод повинен бути оформлений у вигляді окремої універсальної функції. Формальні параметри функції повинні включати: ім'я процедури або функції, що реалізує обчислення $F(\mathbf{X})$; кількість рівнянь; відносну похибку обчислення кореня; початкове наближення; розв'язок рівняння (параметр, що повертається). В програмі передбачити можливість підрахунку числа викликів функцій.
При написанні процедур, що реалізують обчислення функцій, які входять в систему нелінійних рівнянь, необхідно врахувати, що функції повинні містити всі параметри схеми у вигляді іменованих констант або змінних.
4. Набрати і налагодити програму на комп'ютері, замінивши задану систему нелінійних рівнянь системою лінійних рівнянь із відомими розв'язками.
5. Для системи нелінійних рівнянь, отриманої в п.1 отримати і записати значення і аргументи функцій, що входять в систему на кожному ітераційному кроці алгоритмів.
6. Порівняти різні методи за швидкістю збіжності, надійністю, потрібним машинним ресурсам (обсяг оперативної пам'яті, кількість арифметичних операцій, час виконання).

Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета.
3. Електрична схему, яка відповідає варіанту, і отримана система нелінійних рівнянь відносно невідомих напруг чи струмів.
4. Робоче завдання.
5. Математичні формулювання використаних алгоритмів розв'язання системи нелінійних рівнянь кожним методом.
6. Лістинг робочої програми.
7. Результати розрахунків.
8. Висновки.

Задачі

1. Знайти напругу на діодах u_{d1} і u_{d2} для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати закони Кірхгофа і врахувати, що струм i_{dk} , який протікає через k -й діод пов'язаний із напругою на ньому u_{dk} залежністю $i_{dk} = i_{0k} \left(\exp\left(\frac{u_{dk}}{m_k \phi_T}\right) - 1 \right)$, де i_{0k} - зворотний струм k -го діода, ϕ_T - тепловий потенціал, m_k - коефіцієнт неідеальності k -го діода.



Значення напруги джерела e , опори резистора R , і параметри діодів вибрати із таблиці відповідно до варіанта:

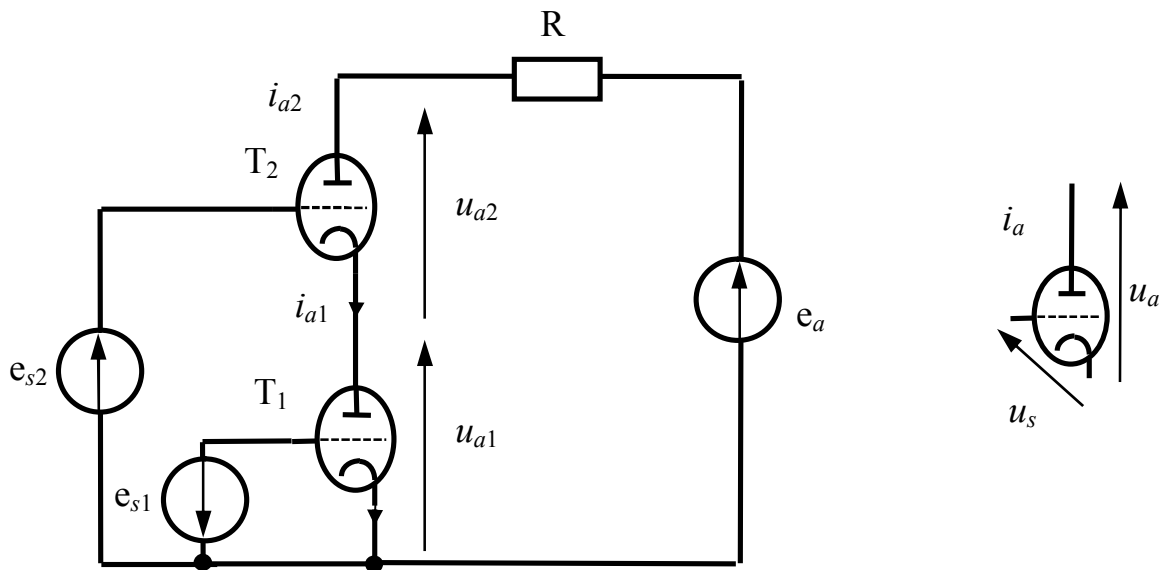
№ варіанту	$e, \text{В}$	$R, 10^3 \text{ Ом}$	$i_{01}, 10^{-9} \text{ А}$	$i_{02}, 10^{-9} \text{ А}$	m_1	m_2	$\phi_T, 10^{-3} \text{ В}$
1	6	1.5	2	5	1.5	1.7	26
2	5	0.4	10	2	2	1.8	26
3	10	1	8	20	1.2	1.6	26

2. Знайти напругу на тріодах u_{a1} і u_{a2} для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати закони Кірхгофа і врахувати, що струм i_a , який протікає через тріод пов'язаний із напругами u_a і u_s залежністю

$$i_a = \begin{cases} 0, & u_s + Du_a \leq 0 \\ g \left(\frac{u_s + Du_a}{1 + \chi D} \right)^{\frac{3}{2}}, & u_s + Du_a > 0 \end{cases},$$

де g - первеанс тріода, D - проникність тріода, χ - коефіцієнт, який залежить від співвідношення відстаней анод-катод і сітка анод.

Струмом сіток знехтувати.



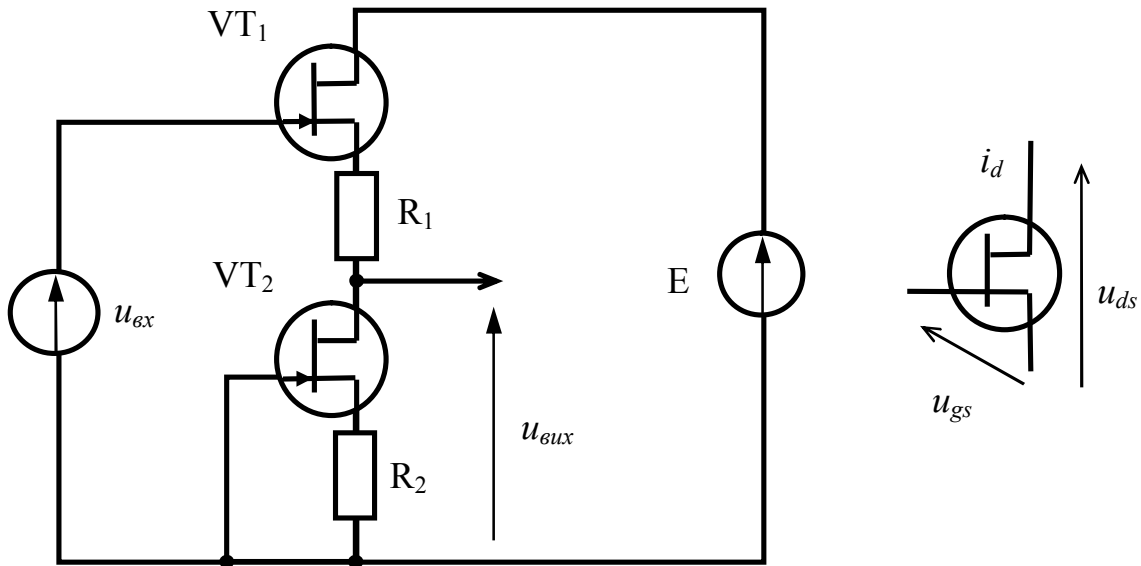
Значення напруг джерел e_s , e_a , опори резистора R , и параметри тріода вибрати із таблиці відповідно до варіанта:

№ варіанту	e_a , В	e_{s1} , В	e_{s2} , В	R , 10^3 Ом	g , 10^{-4} А/В ^{3/2}		χ		D	
					T ₁	T ₂	T ₁	T ₂	T ₁	T ₂
1	250	2	100	100	1	5	3	4	0.05	0.03
2	200	3	70	50	10	2	3.5	4	0.05	0.01
3	300	2.5	120	70	3	4	4	5	0.02	0.07

3. Знайти напругу $u_{вих}$ для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати закони Кірхгофа і врахувати, що струм стоку i_d польового транзистора із керуючим $p-n$ переходом пов'язаний із напругою u_{ds} залежністю

$$i_d = \begin{cases} g_{22}u_{ds}, & u_{gs} \leq u_0 \\ \beta(2(u_{gs} - u_0) - u_{ds})u_{ds} + g_{22}u_{ds}, & u_{gs} > u_0, u_{ds} < u_{gs} - u_0 \\ \beta(u_{gs} - u_0)^2 + g_{22}u_{ds}, & u_{gs} > u_0, u_{ds} \geq u_{gs} - u_0 \end{cases}$$

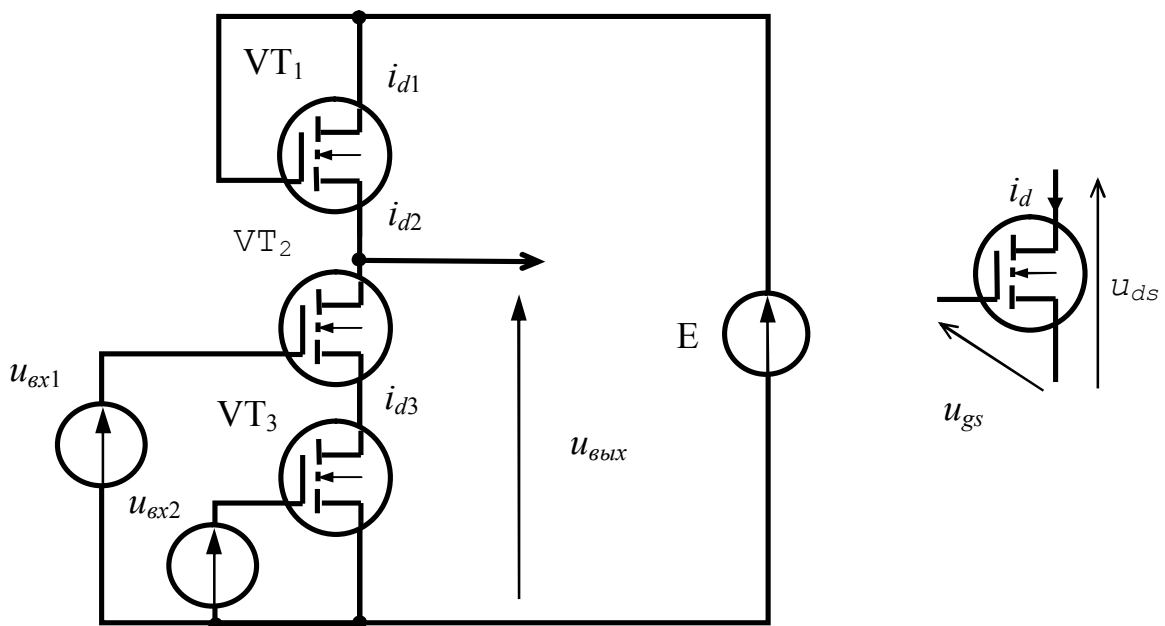
де β - питома крутизна транзистора, g_{22} - вихідна провідність транзистора, u_0 - напруга відсічки.



Значення напруг джерел E і $u_{вх}$, опір резисторів R_1 і R_2 , і параметрів транзисторів вибрати із таблиці відповідно до варіанта:

№ варіанту	E, В	$u_{вх}$, В	R_1 , 10^3 Ом	R_2 , 10^3 Ом	u_0 , В		β , 10^{-4} А/В^2		g_{22} , 10^{-5} СМ	
					VT ₁	VT ₂	VT ₁	VT ₂	VT ₁	VT ₂
1	10	2	2	0.1	-3	-4	2	4	2	1
2	5	3	1	0.6	-5	-2	0.8	5	10	2
3	7.5	5	6	1	-2	-3	1	2	4	6

4. Знайти напругу $u_{вх}$ для схеми, наведеної на рисунку.



Застосувати закони Кірхгофа і врахувати, що струм стоку МДН-транзистора i_d пов'язаний з напругою u_{ds} залежністю

$$i_d = \begin{cases} g_{22}u_{ds}, & u_{gs} \leq u_0 \\ \beta(2(u_{gs} - u_0) - u_{ds})u_{ds} + g_{22}u_{ds}, & u_{gs} > u_0, u_{ds} < (u_{gs} - u_0) \\ \beta(u_{gs} - u_0)^2 + g_{22}u_{ds}, & u_{gs} > u_0, u_{ds} \geq (u_{gs} - u_0) \end{cases}$$

де β - питома крутизна транзистора, g_{22} - вихідна провідність транзистора, u_0 - порогова напруга.

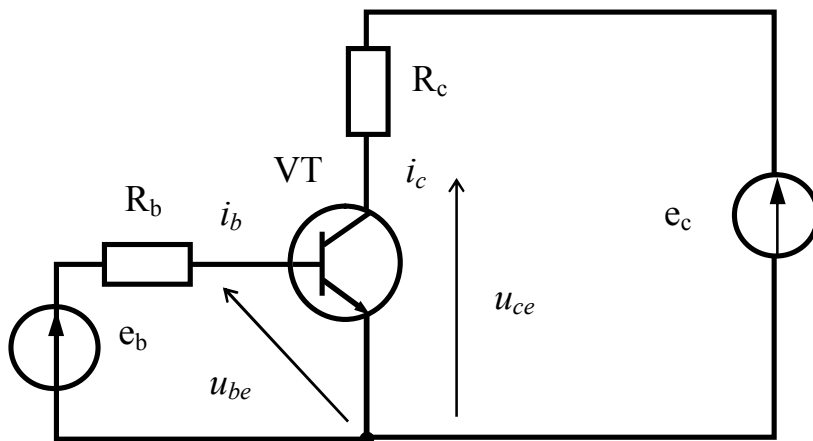
Значення напруг джерел E , u_{ex1} , u_{ex2} і параметрів транзисторів вибрати із таблиці відповідно до варіанта:

№ варіанту	E, В	u_{ex1} , В	u_{ex2} , В	u_0 , В			β , 10^{-4}A/B^2			g_{22} , 10^{-4}C/M		
				VT ₁	VT ₂	VT ₃	VT ₁	VT ₂	VT ₃	VT ₁	VT ₂	VT ₃
1	9	4	10	3	2.5	2	2	2	4	2	1	4
2	8	5	12	2	2.5	1.5	10	8	2	4	6	2
3	12	4	15	3	3.5	3	5	1	4	5	1	8

5. Знайти напруги u_{be} і u_{ce} на біполярному транзисторі для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати закони Кірхгофа і врахувати, що струми транзистора пов'язані з напругами

$$u_{be} \text{ і } u_{ce} \text{ залежностями } i_e = i_{e0} \left(\exp\left(\frac{u_{be} + h_{12}u_{ce}}{m_e \phi_T}\right) - 1 \right), \quad i_c = \alpha i_e - i_{c0} \left(\exp\left(\frac{u_{be} - u_{ce}}{m_c \phi_T}\right) - 1 \right),$$

$i_b = i_e - i_c$, де i_{e0} - зворотній струм емітерного переходу транзистора, i_{c0} - зворотний струм колекторного переходу транзистора, α - коефіцієнт передачі струму емітера, ϕ_T - тепловий потенціал, m_e - коефіцієнт неідеальності емітерного переходу транзистора, m_c - коефіцієнт неідеальності колекторного переходу транзистора h_{12} - коефіцієнт зворотного зв'язку.



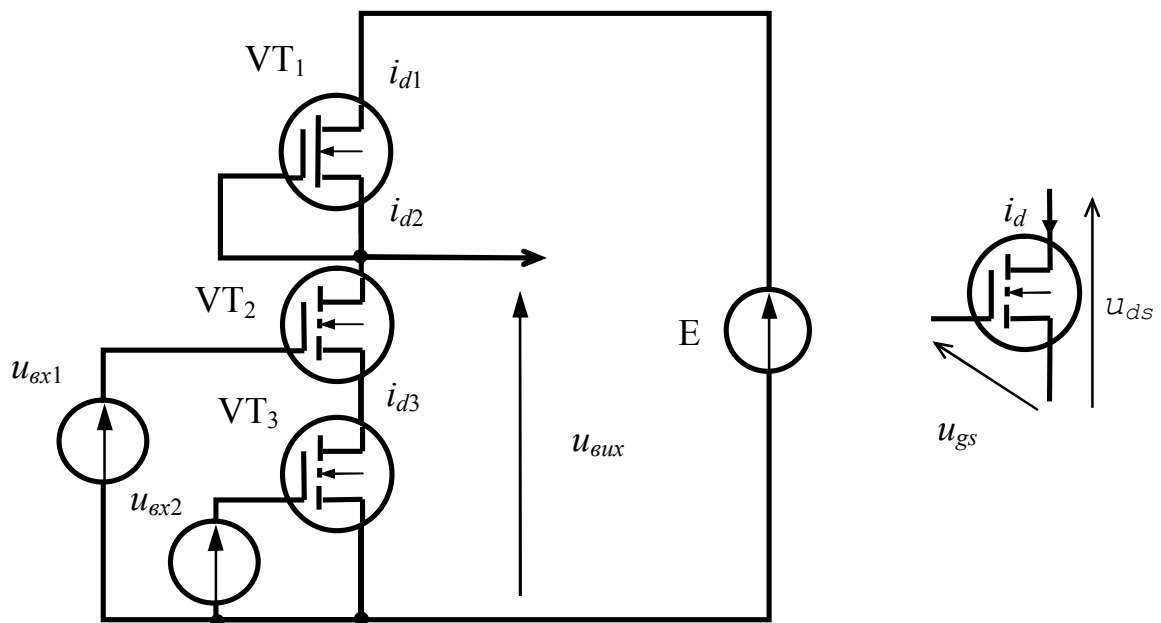
Значення напруг джерел e_b і e_c , опорів резисторів R_b і R_c і параметрів транзистора вибрати із таблиці відповідно до варіанта:

№ варіанту	e_b , В	e_c , В	R_b , 10^3 Ом	R_c , 10^2 Ом	i_{e0} , 10^{-9} А	m_e	i_{c0} , 10^{-9} А	m_c	Φ_T , 10^{-3} В	α	h_{12} , 10^{-3}
1	4	10	5	1	1	1.01	1.5	1.5	26	0.98	2
2	5	12	4	1.5	2	1.05	2.8	1.4	26	0.99	1
3	6	15	7	2	2.5	1.06	4	1.6	26	0.99	1.5

6. Знайти напругу $u_{\text{вих}}$ для схеми, наведену на рисунку. Застосувати закони Кірхгофа і врахувати, що струм стоку МДН-транзистора i_d пов'язаний із напругою u_{ds} залежністю

$$i_d = \begin{cases} g_{22}u_{ds}, & u_{gs} \leq u_0 \\ \beta(2(u_{gs} - u_0) - u_{ds})u_{ds} + g_{22}u_{ds}, & u_{gs} > u_0, u_{ds} < (u_{gs} - u_0) \\ \beta(u_{gs} - u_0)^2 + g_{22}u_{ds}, & u_{gs} > u_0, u_{ds} \geq (u_{gs} - u_0) \end{cases}$$

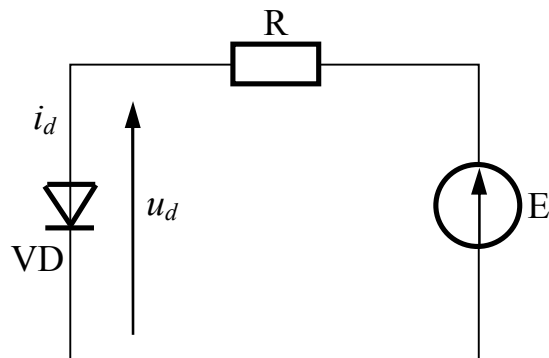
де β - питома крутизна транзистора, g_{22} - вихідна провідність транзистора, u_0 - порогова напруга.



Значення напруг джерел E , $u_{\text{вх1}}$, $u_{\text{вх2}}$ і параметрів транзисторів вибрати із таблиці відповідно до варіанта

№ варіанту	E , В	$u_{\text{вх1}}$, В	$u_{\text{вх2}}$, В	u_0 , В			β , 10^{-4} А/В^2			g_{22} , 10^{-4} СМ		
				VT ₁	VT ₂	VT ₃	VT ₁	VT ₂	VT ₃	VT ₁	VT ₂	VT ₃
1	8	4	6	-1	2	3	1	2	3	0.4	0.1	0.6
2	10	5	7	-2	3	2	1	0.1	0.8	0.1	0.05	0.1
3	12	6	8	-1.5	2.5	3	2	1	1	0.5	0.2	0.8

7. Знайти напругу на діоді u_d для схеми, наведеної на рисунку. Застосувати закони Кірхгофа і врахувати, що струм i_d , який протікає через діод пов'язаний із напругою u_d залежністю $i_d = i_0 \left(\exp\left(\frac{u_d - i_d r_b}{m\phi_T}\right) - 1 \right)$, де i_0 - зворотний струм діода, ϕ_T - тепловий потенціал, m - коефіцієнт неідеальності діода, а опір бази діода пов'язаний зі струмом діода i_d залежністю: $r_b = \frac{r_{b0}}{1 + \frac{i_d}{i_v}}$, r_{b0} - опір бази діода в рівноважному стані, i_v - струм, який відповідає переходу до високих рівнів інжекції. Задачу розв'язувати як систему із двох рівнянь.



Значення напруги джерела E , опір резистора R , і параметри діоду вибрати із таблиці у відповідності до варіанта

№ варіанту	E , В	R , 10^3 Ом	i_0 , 10^{-9} А	r_{b0} , 10^3 Ом	i_v , 10^{-3} А	m	ϕ_T , 10^{-3} В
1	5	4	10	2	1	1.5	26
2	7	2	1	0.5	0.3	2	26
3	10	8	5	10	3	1.8	26

Варіанти завдань

Номер бригади	Номер задачі	Номер варіанту задачі
1	2	1
2	3	1
3	4	1
4	5	1
5	6	1
6	7	1
7	1	1
8	2	2
9	3	2
10	4	2
11	5	2
12	6	2
13	7	2
14	1	2
15	3	3
16	4	3