

Численное решение задачи Коши для системы жестких дифференциальных уравнений

Цель работы: получение практических навыков построения алгоритмов численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, оценки погрешности решения, автоматического выбора шага интегрирования, программной реализации алгоритмов на компьютере, сравнение эффективности различных методов.

Краткие теоретические сведения

Под задачей Коши для системы из n дифференциальных уравнений понимают задачу:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0, \quad (2)$$

где $\mathbf{Y} = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$ - n -мерный вектор неизвестных функций, подлежащих определению, $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) = [f_1(t, \mathbf{Y}), f_2(t, \mathbf{Y}), \dots, f_n(t, \mathbf{Y})]^T$ - n -мерный вектор значений производных, $\mathbf{Y}_0 = [y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}]^T$ - n -мерный вектор начальных условий.

Многие задачи в электронике приводят к жестким дифференциальным уравнениям. Результат решения таких уравнений содержит как быстрозатухающие, так и медленнозатухающие компоненты. Наличие малых постоянных времени не позволяет интегрировать такие системы явными методами с большим шагом даже на участках после переходного слоя, где быстрозатухающие процессы практически завершились. Наличие быстрозатухающих компонент накладывает жесткие ограничения на выбор шага явных методов на всем отрезке интегрирования. Если эти ограничения оказываются невыполненными, то решения явными методами теряют устойчивость. Для оценки жесткости дифференциальных уравнений используют коэффициент жесткости, который может быть рассчитан по формуле:

$$S = \frac{\max_{i=1, n, t \in [0, t_{end}]} (-\operatorname{Re} \lambda_i(t))}{\min_{i=1, n, t \in [0, t_{end}]} |\operatorname{Re} \lambda_i(t)|},$$

где $\lambda_i(t)$ — собственные значения матрицы Якоби функции $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$.

Общим подходом к решению жестких дифференциальных уравнений является использование неявных методов. Именно использование неявных методов позволяет выбирать шаг интегрирования только исходя из заданной точности решения, а не из соображений устойчивости

В настоящее время при интегрировании жестких систем уравнений широко используется метод Гира. В его основу положены чисто неявные многшаговые методы. Для метода Гира порядка m решение \mathbf{Y}_{i+1} в точке $t=t_{i+1}$ определяется по неявной формуле:

$$\frac{1}{h_i} \sum_{k=0}^m a_k \mathbf{Y}_{i-k+1} = \mathbf{F}(t_{i+1}, \mathbf{Y}_{i+1}), \quad (3)$$

где $h_i = t_{i+1} - t_i$ – шаг интегрирования, a_k – коэффициенты, которые, в общем случае, изменяются от точки к точке.

Правая часть уравнения (3) представляет собой конечно-разностную аппроксимацию производной $\frac{d\mathbf{Y}}{dt}$, полученную при помощи значений функций, рассчитанных на предыдущих m шагах. Поэтому ее часто называют формулой дифференцирования назад.

Для расчета коэффициентов a_k в формуле (3), строят интерполяционный полином, проходящий через $m+1$ точку $(t_{i-m+1}, \mathbf{Y}_{i-m+1}), (t_{i-m+2}, \mathbf{Y}_{i-m+2}), \dots, (t_i, \mathbf{Y}_i), (t_{i+1}, \mathbf{Y}_{i+1})$ и вычисляют производную $\frac{d\mathbf{Y}}{dt}$ в точке $t=t_{i+1}$ явным образом. В качестве примера, рассмотрим расчет коэффициентов a_k для формулы Гира второго порядка ($m=2$). Для этого построим интерполяционный полином, проходящий через 3 точки $(t_{i-1}, \mathbf{Y}_{i-1}), (t_i, \mathbf{Y}_i)$ и $(t_{i+1}, \mathbf{Y}_{i+1})$:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{i+1} \frac{(t-t_i)(t-t_{i-1})}{h_i(h_i+h_{i-1})} - \mathbf{Y}_i \frac{(t-t_{i+1})(t-t_{i-1})}{h_i h_{i-1}} + \mathbf{Y}_{i-1} \frac{(t-t_{i+1})(t-t_i)}{(h_i+h_{i-1})h_i}. \quad (4)$$

Дифференцируя (4) в точке $t=t_{i+1}$ имеем:

$$\frac{d\mathbf{Y}(t_{i+1})}{dt} = \mathbf{Y}_{i+1} \left(\frac{1}{h_i+h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) - \mathbf{Y}_i \frac{h_i+h_{i-1}}{h_i h_{i-1}} + \mathbf{Y}_{i-1} \frac{h_i}{(h_i+h_{i-1})h_i}. \quad (5)$$

Сравнивая (5) с левой частью формулы (3) получим:

$$a_0 = 1 + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}}; \quad a_1 = -1 - \frac{h_i}{h_{i-1}}; \quad a_2 = \frac{h_i^2}{(h_i+h_{i-1})h_{i-1}}.$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты при $m=3,4,5$.

$m=3$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}} + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}+h_{i-2}}; \\ a_1 &= -\frac{(h_i+h_{i-1})(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})}{h_{i-1}(h_{i-1}+h_{i-2})}; \\ a_2 &= \frac{h_i^2(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})}{(h_i+h_{i-1})h_{i-1}h_{i-2}}; \\ a_3 &= -\frac{h_i^2(h_i+h_{i-1})}{(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})(h_{i-1}+h_{i-2})h_{i-2}}. \end{aligned}$$

$m=4$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}} + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}+h_{i-2}} + \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}+h_{i-2}+h_{i-3}}; \\ a_1 &= -\frac{(h_i+h_{i-1})(h_i+h_{i-1}+h_{i-2})(h_i+h_{i-1}+h_{i-2}+h_{i-3})}{h_{i-1}(h_{i-1}+h_{i-2})(h_{i-1}+h_{i-2}+h_{i-3})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{h_i^2(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})}{(h_i + h_{i-1})h_{i-1}h_{i-2}(h_{i-2} + h_{i-3})}; \\
a_3 &= -\frac{h_i^2(h_i + h_{i-1})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})}{(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_{i-1} + h_{i-2})h_{i-2}h_{i-3}}; \\
a_4 &= \frac{h_i^2(h_i + h_{i-1})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})}{(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_{i-2} + h_{i-3})h_{i-3}}. \\
\end{aligned}$$

$m=5:$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1} + h_{i-2}} + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3}} + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4}}; \\
a_1 &= -\frac{(h_i + h_{i-1})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}{h_{i-1}(h_{i-1} + h_{i-2})(h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}; \\
a_2 &= \frac{h_i^2(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}{(h_i + h_{i-1})h_{i-1}h_{i-2}(h_{i-2} + h_{i-3})(h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}; \\
a_3 &= -\frac{h_i^2(h_i + h_{i-1})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}{(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_{i-1} + h_{i-2})h_{i-2}h_{i-3}(h_{i-3} + h_{i-4})}; \\
a_4 &= \frac{h_i^2(h_i + h_{i-1})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})}{(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})(h_{i-2} + h_{i-3})h_{i-3}h_{i-4}}; \\
a_5 &= -\frac{h_i^2(h_i + h_{i-1})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3})}{(h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})(h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})(h_{i-2} + h_{i-3} + h_{i-4})(h_{i-3} + h_{i-4})h_{i-4}}.
\end{aligned}$$

Следует отметить, что методы Гира порядка выше 6 на практике не используют из-за их численной неустойчивости.

Метод Гира первого порядка совпадает с неявным методом Эйлера. Поскольку методы Гира являются неявными, то, как следует из (3), на каждом шаге необходимо решить систему нелинейных уравнений:

$$h_i \mathbf{F}(t_{i+1}, \mathbf{Y}_{i+1}) - a_0 \mathbf{Y}_{i+1} = \sum_{k=1}^m a_k \mathbf{Y}_{i-k+1}. \quad (6)$$

Для решения системы (6), как правило используют квази-ньютоновские методы решения системы нелинейных уравнений.

Локальная погрешность методов Гира может быть оценена по формуле:

$$R_i = c_i h_i^{m+1}, \quad (7)$$

где c_i – коэффициент, зависящий от нелинейности функции $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ на отрезке $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Таким образом, порядок точности методов Гира равен m :

$$p = m. \quad (8)$$

Наиболее универсальным методом апостериорной оценки погрешности методов Гира является правило Рунге:

$$R_i = \frac{\left\| \mathbf{Y}_{i+1, \frac{h}{q}} - \mathbf{Y}_{i+1, h} \right\|}{q^p - 1}, \quad (9)$$

где $\mathbf{Y}_{i+1, h}$, $\mathbf{Y}_{i+1, \frac{h}{q}}$ - значения функций, вычисленными в точке $t=t_{i+1}$, с шагами h_i и $\frac{h_i}{q}$ соответственно, p – порядок точности метода.

Для автоматического выбора шага, после апостериорной оценки погрешности, проверяется выполнение условия:

$$R_i \leq \varepsilon \|\mathbf{Y}_{i+1}\|. \quad (10)$$

Если оно не выполняется, то шаг уменьшают в q раз или в $q^{p+1} \sqrt{\frac{\varepsilon \|\mathbf{Y}_{i+1}\|}{R_i}}$ раз. Уменьшение шага выполняют до тех пор, пока не выполнится условие (10). После чего переходят к новому шагу. При этом новый шаг h_{i+1} выбирают по правилу зон:

$$h_{i+1} = \begin{cases} h_i, & \frac{\varepsilon}{q^{p+1}} \leq \frac{R_i}{\|\mathbf{Y}_{i+1}\|} \leq \varepsilon; \\ qh_i, & \frac{R_i}{\|\mathbf{Y}_{i+1}\|} < \frac{\varepsilon}{q^{p+1}}, \end{cases} \quad (11)$$

или из соотношения:

$$h_{i+1} = h_i q^{p+1} \sqrt{\frac{\varepsilon \|\mathbf{Y}_{i+1}\|}{R_i}}. \quad (12)$$

Необходимо отметить, что в соответствии с формулой (7) локальная погрешность методов Гира зависит как от нелинейности функций $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ так и от порядка метода. Поэтому, для заданной погрешности решения, на каждом отрезке, где ищется локальное решение, всегда существует оптимальный порядок метода, обеспечивающий нахождение решения с наибольшим шагом. В качестве примера рассмотрим методы Гира первого и второго порядка. На рис.1 показана зависимость локальной погрешности от величины шага для указанных методов. Как видно из этого рисунка, при заданной погрешности решения R_0 оба метода имеют одинаковую эффективность. Для заданной погрешности R_2 , более оптимальным оказывается метод второго порядка. Если же задана погрешность решения R_1 , то предпочтение следует отдать методу первого порядка. Современные методы интегрирования дифференциальных уравнений строятся как методы переменного порядка, когда в зависимости от заданной погрешности и нелинейности $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ выбирается метод с оптимальным порядком. Такие методы адаптивно подстраивают порядок уравнений на разных участках для того, чтобы интегрирование шло с максимальным шагом.

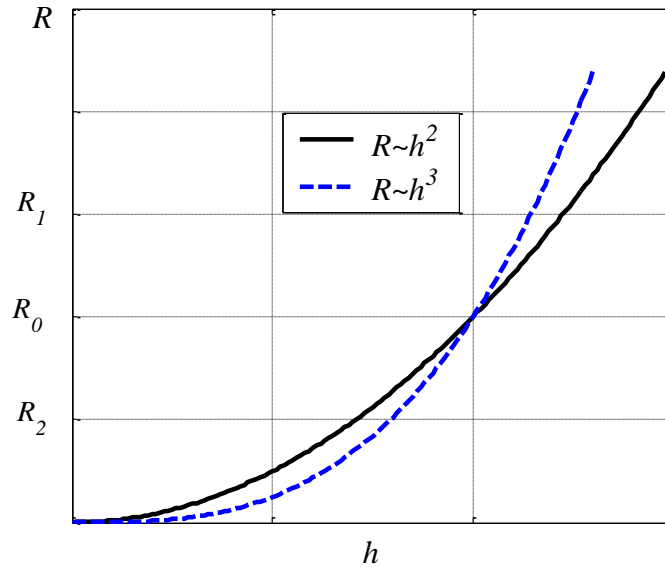


Рис.1. Локальная погрешность решения системы дифференциальных уравнений методами первого и второго порядков точности с шагом h .

Рабочее задание

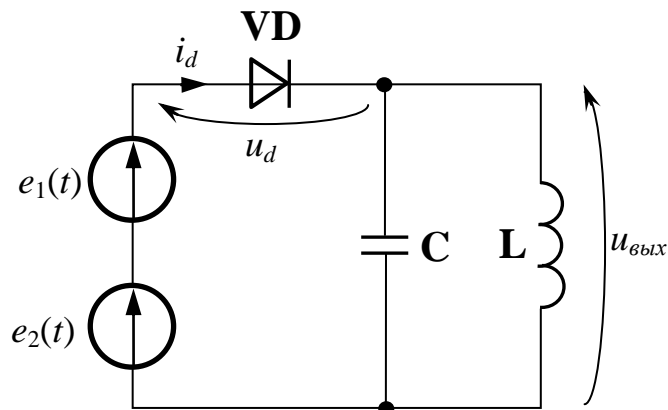
1. Построить алгоритмы численного решения задачи Коши методами Гира 2, 3 и 4 порядка с автоматическим выбором шага интегрирования для достижения заданной локальной относительной погрешности ϵ либо абсолютной погрешности Δ .
2. Составить рабочую программу с использованием универсальных функций численного решения задачи Коши. Минимальный набор параметров функции решения задачи Коши должен включать: имя функции, вычисляющей вектор производных искомых функций (правых частей системы дифференциальных уравнений), количество дифференциальных уравнений в системе, интервал времени, на котором нужно найти решение, вектор начальных условий, погрешность решения, массив временных отсчетов, в которых найдено решение, матрицу решений, максимальное число временных отсчетов, количество фактически полученных временных отсчетов, в которых найдены решения с заданной погрешностью.
3. Набрать и отладить программу на компьютере. Отладку осуществить с использованием в качестве $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ функций, для которых известно аналитическое решение.
4. Выбрать задачу в соответствии с вариантом. Для заданной схемы сформулировать задачу Коши.
5. Провести решение задачи Коши, полученной в пункте 4 рабочего задания каждым методом с подсчетом числа элементарных отрезков, необходимых для достижения заданной погрешности $\epsilon=10^{-3}$ и требуемого числа обращений к функции $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$.
6. Сравнить различные методы по эффективности.

Содержание отчета

1. Название работы.
2. Цель.
3. Рабочее задание.
4. Математические формулировки алгоритмов решения задачи Коши.
5. Решаемое уравнение.
6. Текст рабочей программы.
7. Результаты расчетов с подсчетом числа необходимых разбиений заданного отрезка на элементарные и количества вызовов функции $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ для каждого из методов, графики решений.
8. Выводы.

Задачи

1. Найти напряжение $u_{\text{вых}}$ в течение времени $t \in [0, t_{\text{end}}]$ для схемы, приведенной на рисунке.



Учсть, что ток i_d , протекающий через диод связан с напряжением u_d зависимостью:

$$i_d = i_0 \left(\exp\left(\frac{u_d}{m\phi_T}\right) - 1 \right),$$

где i_0 — обратный ток диода, ϕ_T — тепловой потенциал, m — коэффициент неидеальности диода. Зависимости $e_1(t)$ и $e_2(t)$ имеют вид:

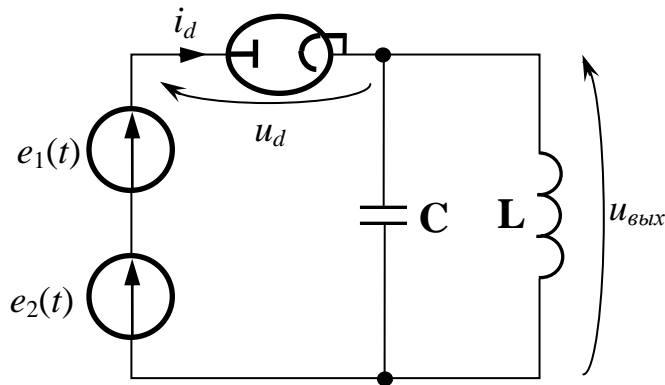
$$e_n(t) = E_{0n} \sin(\omega_n t + \varphi), \quad n = 1, 2,$$

где E_{0n} — амплитуда, ω_n — круговая частота, φ_n — фаза напряжения источника.

Значения параметров напряжения источников напряжения E_{0n} , ω_n и φ_n , индуктивность L , емкость конденсатора C , параметры диода и время t_{end} выбрать из таблицы в соответствии с вариантом:

№ варианта	E_{01} , В	ω_1 , 10^6 рад/с	φ_1	E_{02} , В	ω_2 , 10^6 рад/с	φ_2	L , 10^{-3} Гн	C , 10^{-9} Ф	i_0 , 10^{-9} А	m	φ_T , 10^{-3} В	t_{end} , 10^{-3} с
1	0.4	1.25	0	0.4	1.5	$-\pi/4$	0.2	80	20	1.8	26	0.125
2	0.3	0.4	$-\pi/4$	0.3	0.45	0	10^4	$4 \cdot 10^4$	10^5	2.2	26	0.63

2. Найти напряжение $u_{вых}$ в течение времени $t \in [0, t_{end}]$ для схемы, приведенной на рисунке.



Учесть, что ток i_d , протекающий через диод связан с напряжением u_d зависимостью:

$$i_d = \begin{cases} g u_d^{3/2}, & u_d \geq 0 \\ 0, & u_d < 0 \end{cases}$$

где g — параметр диода. Зависимости $e_1(t)$ и $e_2(t)$ имеют вид:

$$e_n(t) = E_{0n} \sin(\omega_n t + \varphi), \quad n = 1, 2,$$

где E_{0n} — амплитуда, ω_n — круговая частота, φ_n — фаза напряжения источника.

Значения параметров напряжения источников E_{0n} , ω_n и φ_n , индуктивность L , емкость конденсатора C , параметры диода и время t_{end} выбрать из таблицы в соответствии с вариантом:

№ варианта	E_{01} , В	ω_1 , 10^6 рад/с	φ_1	E_{02} , В	ω_2 , 10^3 рад/с	φ_2	L , 10^{-6} Гн	C , 10^{-9} Ф	g , 10^{-3} А/В ^{3/2}	t_{end} , 10^{-6} с
1	20	35	0	20	30	$\pi/8$	2	20	4	6.3
2	30	0.5	$-\pi/8$	30	0.625	$\pi/4$	200	320	0.1	252

3. Найти напряжение $u_{вых}$ в течение времени $t \in [0, t_{end}]$ для схемы, приведенной на рисунке.

Учесть, что токи эмиттера i_e и коллектора i_c связаны с напряжениями u_{be} и u_{bc} зависимостями:

$$i_e = i_{e0} \left(\exp \left(\frac{u_{be}}{m_e \phi_T} \right) - 1 \right),$$

$$i_c = i_{c0} \left(\exp \left(\frac{u_{bc}}{m_c \phi_T} \right) - 1 \right),$$

где i_{e0} — обратный ток эмиттерного перехода транзистора, ϕ_T — тепловой потенциал, m_e — коэффициент неидеальности эмиттерного перехода транзистора, i_{c0} — обратный ток коллекторного перехода транзистора, m_c — коэффициент неидеальности коллекторного перехода транзистора. Зависимость $e(t)$ имеет вид

$$e(t) = E_0 \sin(2\pi f t + \varphi),$$

где E_0 — амплитуда, f — частота, φ — фаза напряжения источника.

Значения параметров напряжения источника E_0 , f и φ , сопротивления резистора R , емкость конденсатора C , параметры транзистора и время t_{end} выбрать из таблицы в соответствии с вариантом

№ варианта	E_0 , В	f , 10^3 Гц	φ	R , 10^3 Ом	C , 10^{-6} Ф	I_{e0} , 10^{-12} А	m_e	I_{c0} , 10^{-12} А	m_c	ϕ_T , 10^{-3} В	t_{end} , 10^{-3} с
1	5	1	$\pi/8$	4	1	1	1.7	6	1.8	26	3
2	10	5	$-\pi/6$	1	0.8	5	1.6	25	1.8	26	0.6
3	15	4	$-\pi/8$	1.5	0.5	10	1.7	70	1.9	26	0.75
4	3	2	$\pi/4$	0.2	5	20	1.9	80	1.8	26	1.5

Варианты заданий

Номер бригады	Номер задачи	Номер варианта задачи
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1
5	1	2
6	2	2
7	3	2
8	4	2
9	1	3
10	2	3
11	3	3
12	4	3
13	1	4
14	2	4
15	3	4
16	4	4