

# Лабораторна робота №4

## Дослідження згорткового коду

**Мета роботи:** отримання навичок побудови згорткового кодера.

### Зміст:

Короткі теоретичні відомості .....	1
Згорткові кодери .....	1
Основні параметри згорткових кодів .....	5
Число інформаційних символів $k$ .....	5
Число символів на виході кодера $n$ .....	5
Швидкість коду $R$ .....	5
Надмірність коду $\alpha$ .....	5
Пам'ять коду $l$ .....	5
Повна довжина кодового обмеження .....	6
Вага $\omega$ .....	6
Кодова відстань $d$ .....	6
Мінімальна кодова відстань $d_{min}$ .....	6
Завдання для виконання .....	6
Вимоги до оформлення звіту .....	8
Контрольні питання .....	8

## Короткі теоретичні відомості

### Згорткові кодери

Згорткові коди – це коди, які можуть виправляти помилки і які використовують безперервну або послідовну обробку інформації короткими фрагментами (блоками). Згорткові коди мають пам'ять, т.к. символи на виході кодера залежать як від символів на вході, а й від попередніх символів, що пройшли кодер. Т.о. згортковий кодер є послідовною машиною або автоматом з кінцевим числом станів. Стан кодера визначається вмістом пам'яті.

Згортковий кодер являє собою пристрій, що сприймає за кожен такт роботи в загальному випадку  $k$  вхідних інформаційних символів, і видає на вихід за той же  $n$  вихідний кодт кодованих символів, що підлягають передачі по каналу зв'язку.

Відношення  $R = \frac{k}{n}$  називають відносною швидкістю коду. Вихідні символи, створювані кожному такті, залежить від  $m$  інформаційних символів, що надійшли даному і попередніх тактах. Отже, вихідні символи згорткового кодера однозначно визначаються його вхідним символом та станом кодера, що залежить від  $m - k$  попередніх інформаційних символів.

Згорткові кодери будуються на основі зсувного регістра, суматора модуля 2 і комутатора. Зсувний регістр складається з  $m$  тригерних осередків, у яких може зберігатися один із двох можливих станів (0 або 1). У момент надходження на вхід нового інформаційного символу, символи, що зберігаються в регістрі, зсуваються на 1 позицію вправо, крайній правий розряд виводиться з регістру, а новий інформаційний біт записується в крайній лівий розряд ( Рис. 1).



Рис. 1. Зсувний регістр.

Суматор по модулю 2 складає символи, що надійшли на його вхід за наступним правилом: сума надійшли на входи двійкових символів дорівнює 0, якщо число одиниць на входах парне, і дорівнює 1, якщо число одиниць на всіх входах суматора непарне.

Залежно від цього, чи є у складі кодованого сигналу постійний вхідний, згорткові коди діляться на 2 великих класу – систематичні і несистематичні. Систематичними називаються такі коди, у вихідній послідовності яких присутня послідовність, що породила його, в незмінному вигляді ( Рис. 2, а). Несистематичними називаються коди, в яких всі вихідні послідовності відмінні від її породила ( Рис. 2, б).

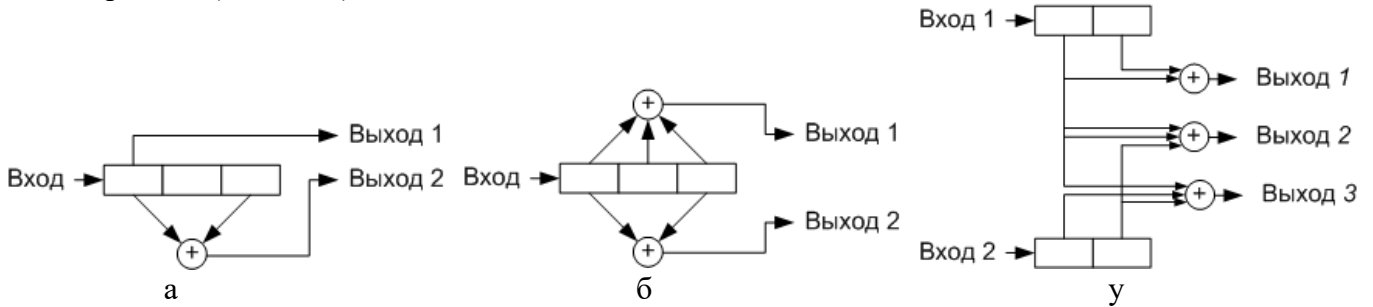


Рис. 2. Приклади систематичного (а) і несистематичного (б) згорткового кодерів з  $R = \frac{1}{2}$ , несистематичного згорткового кодера з  $R = \frac{2}{3}$  (в).

У випадку якщо довжина зсувного регістру дорівнює  $m$ , використовуються  $k$  вхідних символу кожному такті і використовується  $n \geq 2$  виходів кодера, очевидно, кожен вхідний символ впливатиме  $l_{\Pi} = \frac{mn}{k}$  вихідних кодових символів. Ця величина називається повною довжиною кодового обмеження.

Загальний вигляд згорткового кодера наведено на Рис. 3. Причому якщо  $k > 1$ , то використовується не один, а  $k$  зсувних регістрів. Причому вхідні символи, у разі, надходять паралельно попри всі входи. Наприклад, якщо є вхідна послідовність  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ , то  $k = 2$  за перший такт на входи кодера надійдуть символи  $a_0$  і  $a_1$ , за другий -  $a_2$  і  $a_3$  т.д.

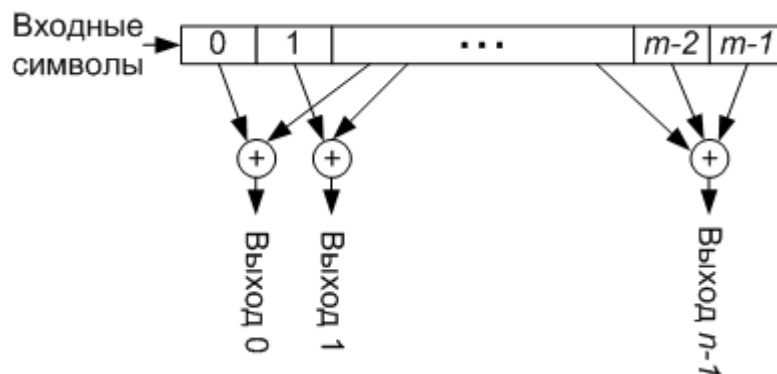


Рис. 3. Загальний вигляд двійкового згорткового кодера.

Як видно, кожен із  $n$  виходів виходить шляхом підсумовування деяких розрядів зсувного регістру. Такі зв'язки задаються за допомогою  $k$  послідовностей, що породжують  $g_j = (g_{j0}, g_{j1}, g_{j2}, \dots)$ , де кожна компонента  $g_{ji}$  визначається наступним чином:

$$g_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й разряд регистра связан с } j\text{-м сумматором,} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

У деяких випадках зручно описувати зсувні регістри у вигляді поліномів. Нехай  $A(X)$  – послідовність символів на вході кодера, описана у вигляді полінома,  $B_j(X)$  – послідовність символів на  $j$  тому виході кодера, описана у вигляді полінома:

$$A(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots$$

$$B_j(X) = b_0^{(j)} + b_1^{(j)}X + b_2^{(j)}X^2 + \dots$$

де  $X^i$  - символ оператора затримки  $i$  тактів роботи зсувного регістру,  $a_i$  і  $b_i^{(j)}$  - інформаційні двійкові символи (можуть приймати значення 0 і 1).

Тоді в силу лінійності згорткового коду

$$B_j(X) = G_j(X)A(X),$$

де  $G_j(X) = g_0 + g_1X + g_2X^2 + \dots$   $z^{m-1}$  -  $j$  той породжувальний многочлен згорткового коду.

Багаточлени, що породжують, для кодерів, наведених на Рис. 2(а) та Рис. 2(б) мають такий вигляд:

$$\begin{cases} G_1(X) = 1 \\ G_2(X) = 1 + X^2 \end{cases} \text{ для кодера Рис. 2(а) та } \begin{cases} G_1(X) = 1 + X + X^2 \\ G_2(X) = 1 + X^2 \end{cases} \text{ для кодера на Рис. 2(б).}$$

Для зручності запису багаточлени, що породжують, можуть об'єднуватися в матриці розмірністю  $k \times n$ , яка називається породжувальною матрицею і яка, для вищенаведених прикладів буде мати вигляд:

$$G(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 + X^2 \end{bmatrix} \text{ для кодера Рис. 2(а) та } G(X) = \begin{bmatrix} 1 + X + X^2 & 1 + X^2 \end{bmatrix} \text{ для кодера на Рис. 2(б).}$$

Кожен рядок в такій матриці відповідає одному з  $k$  символів вхідної послідовності (у нашому прикладі  $k=1$ ), а число поліномів рядку дорівнює числу схем підсумовування по модулю 2. При  $k > 1$  деякі поліноми, що породжують, в матриці можуть дорівнювати нулю.

Розглянемо як кодуватимуться вхідна інформаційна послідовність 101<sub>2</sub> кодером, зображеним на Рис. 2(б). Вхідний інформаційної послідовності відповідає поліном  $A(X) = 1 + X^2$ . З урахуванням

того, що породжуючі поліноми мають вигляд  $\begin{cases} G_1(X) = 1 + X + X^2 \\ G_2(X) = 1 + X^2 \end{cases}$ , на виходах суматорів за модулем

$$2 \text{ отримаємо наступні поліноми } \begin{cases} B_1(X) = (1 + X + X^2) + (X^2 + X^3 + X^4) \\ B_2(X) = (1 + X^2) + (X^2 + X^4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B_1(X) = 1 + X + X^3 + X^4 \\ B_2(X) = 1 + X^4 \end{cases},$$

Що відповідає вихідним послідовностям 11011 та 10001.

Тобто, на виході кодера на кожному такті з'являться такі символи:

$B_1(X)$	1	1	0	1	1
$B_2(X)$	1	0	0	0	1
$B(X)$	11	10	00	10	11
Так ти	1	2	3	4	5

Ще однією досить популярною формою опису структури згорткового кодера є опис у вигляді генератора коду. Наприклад, структуру кодера, зображених на Рис. 2(б) можна записати у вигляді 2 послідовностей 111;101 або у вісімковому вигляді 7<sub>8</sub>;5<sub>8</sub>. Структуру систематичного кодера, зображеного на Рис. 2(а) можна записати як 100; 101 (у двійковому вигляді) або 4<sub>8</sub>; 5<sub>8</sub> (у вісімковому вигляді). Як видно, такий запис задає номери відводів  $m$  розрядного регістру зсуву.

Згортковий кодер, як кінцевий автомат з пам'яттю, так само може бути описаний діаграмою станів. Діаграма станів є спрямований граф, вершини якого ототожнюються з можливими станами кодера, а ребра, помічені стрілками, вказують можливі переходи між станами. Причому внутрішнім станом кодера вважаються символи, які у  $(m-1)$  розрядах регістру (починаючи від входу кодера).

Приклад діаграми станів кодера, зображеного на Рис. 2(б), наведено нижче.

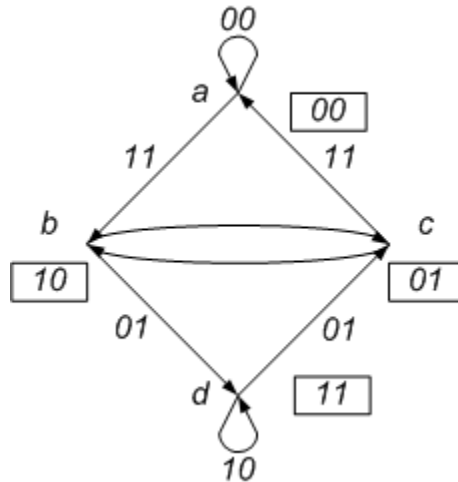


Рис. 4. Діаграма станів кодера, зображеного Рис. 2(б).

Діаграму станів можна побудувати в такий спосіб. Вихідно кодер може перебувати в стані 00. При цьому на його вхід може надійти 0 і тоді стан кодера не зміниться (петля біля вершини 00 з написом 00). Або на вхід надійде 1 і тоді кодер перейде в стан 10 і на його виходах з'являться символи 11 (стрілка від вершини 00 до вершини 10 з написом 11). Наступний вхідний символ так само буде або 0, або 1 і переходи зі стану 10 будуються аналогічним чином, поки не будуть відображені всі можливі переходи всередині кодера.

Діаграму станів можна розгорнути в часі, при цьому вийде ґраткова (ґратчаста) діаграма (trellis) diagram). Ґратчаста діаграма для кодера, зображеного на Рис. 2(б) наведено нижче.

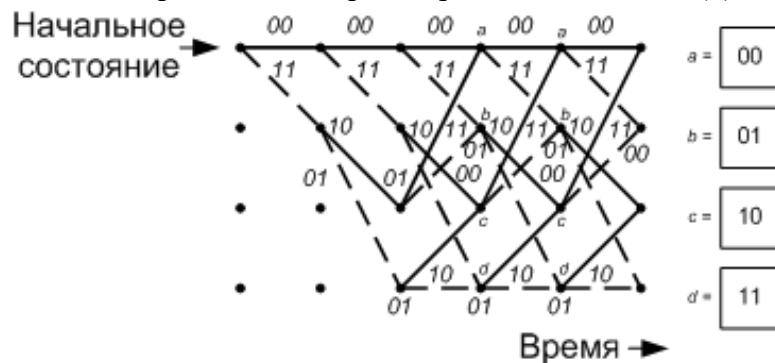


Рис. 5. Ґратчаста діаграма кодера, зображеного на Рис. 2(б).

На цьому діаграмі штрихові лінії (гілки) відповідають переходам, що відбуваються при надходженні інформаційного символу 1, а суцільні лінії відповідають переходам, що відбуваються при надходженні інформаційного символу 0. З ґратової діаграми видно, що її структура після закінчення «перехідного процесу» стає повторюваною. Ґратчаста діаграма показує всі дозволені шляхи, якими може просуватися кодер при кодуванні. У цьому, кожній інформаційній послідовності символів відповідає своя траєкторія просування по решітчастою діаграмі, тобто. ґратчаста діаграма однозначно пов'язує інформаційну послідовність, послідовність станів кодера та послідовність символів на виході.

Результат кодування можна отримати не тільки перемножуючи поліноми (вхідні та утворюючі), але й спираючись на самі принципи роботи кодера. Нехай вхід кодера, зображеного на Рис. 2(б), надходить послідовність символів 11011<sub>2</sub> тоді роботу кодера ілюструє

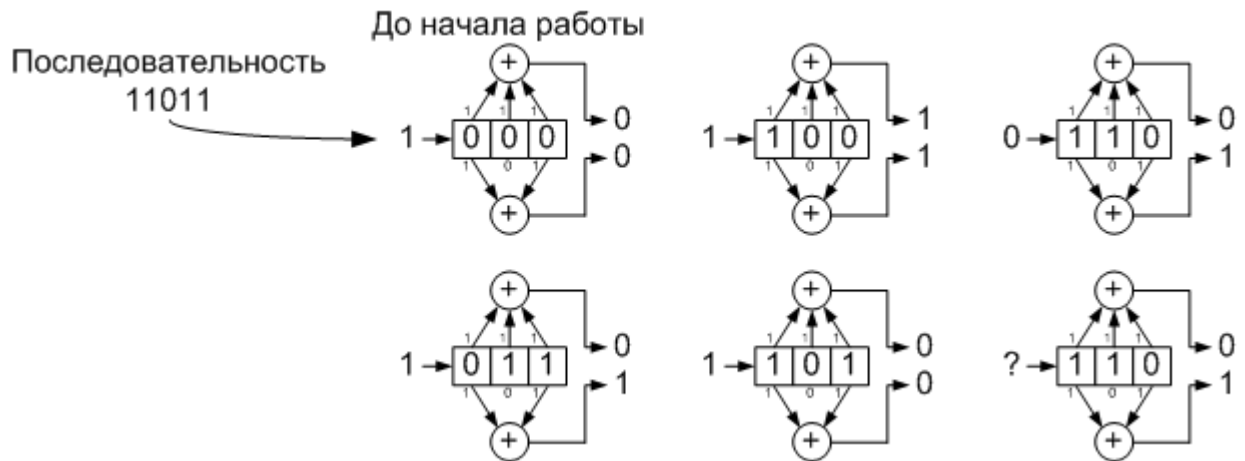


Рис. 6. Функціонування згорткового кодера.

Бачимо, що на виході 1 буде отримана послідовність  $010000_2$  а на виході 2 – послідовність  $011101_2$ . На самому регістрі залишиться значення  $110_2$ .

## Основні параметри згорткових кодів

### Число інформаційних символів $k$

Число інформаційних символів, що надходять на вхід кодера згортки за один такт, позначається буквою  $k$ .

### Число символів на виході кодера $n$

Число символів, що утворюються всіх виходах кодера за один такт роботи, позначається буквою  $n$ .

### Швидкість коду $R$

Швидкість коду визначається співвідношенням  $R = \frac{k}{n}$  та характеризує надмірність коду.

Великі швидкості коду дозволяють збільшити пропускну здатність каналу зв'язку, водночас збільшуючи ймовірність помилок на виході приймача.

### Надмірність коду $\alpha$

Надмірність коду визначається співвідношенням  $\alpha = 1 - R = 1 - \frac{k}{n}$ .

### Пам'ять коду $l$

Пам'ять коду (інформаційна довжина кодового слова, вхідна довжина кодового обмеження)  $l$  визначається максимальним ступенем породжуючого полінома у складі матриці, що породжує  $G(X)$ . Оскільки максимальна ступінь одного з поліномів, що породжує, визначає число розрядів  $m$  у регістрі зсуву кодера, то  $l = km$  і при  $k = 1$  отримуємо  $l = m$ .

## Повна довжина кодового обмеження

Повна довжина кодового обмеження (ДКО) – це число кодових символів, що породжуються кодером у проміжку часу між надходженням до нього даного інформаційного символу та виходом до каналу відповідного символу, у формуванні якого вхідний символ брав участь. З огляду на те, що кожні  $k$  записувані в регістри інформаційні символи представляються  $n$  символами, повна ДКО визначатиметься виразом  $l_{\Pi} = n \cdot \max [\deg g_{ij}(x) + 1]$ , де  $\deg g_{ij}(x)$  - ступінь породжує полінома. З урахуванням виразу для пам'яті коду отримаємо  $l_{\Pi} = nm = \frac{l \cdot n}{k}$ . Значення  $l_{\Pi}$  вказує на максимальну кількість вихідних символів впливає даний інформаційний символ. Величина повного ДКО характеризує протяжність кореляційних зв'язків у закодованій послідовності одного інформаційного символу.

## Вага $\omega$

Вага  $\omega$  двійкових кодових послідовностей визначається числом «одиниць», що входять до цієї послідовності або кодового слова. Наприклад, для кодової комбінації 101011 вест дорівнюватиме  $\omega=4$ , а для комбінації 1001 вага дорівнюватиме  $\omega=2$ .

## Кодова відстань $d$

Кодова відстань (хеммінгова відстань)  $d$  показує ступінь відмінності між  $i$ -й та  $j$ -й кодovими комбінаціями за умови їхньої однакової довжини. Для будь-яких двох двійкових кодових комбінацій кодова відстань дорівнює числу символів, що не збігаються в них. У загальному вигляді кодова відстань може бути визначена як сумарний результат додавання по модулю 2 однойменних розрядів кодових комбінацій  $d_{ij} = \sum_{k=1}^L k_{ik} \oplus k_{jk}$ , де  $k$  символи  $k_{ik}$  кодових  $k_{jk}$  комбінацій  $i$  і  $j$  довжина кодової комбінації

## Мінімальна кодова відстань $d_{min}$

Мінімальна кодова відстань (мінімальна відстань хеммінга) – це найменша відстань Хеммінга для набору кодових комбінацій постійної довжини. Перебравши всі можливі пари кодових комбінацій, визначається мінімальне їх:  $d_{min} = \min d_{ij}$ .

## Завдання для виконання

- Написати функцію, що реалізує кодування вхідних даних згортковим кодером згідно з варіантом. Як вхідні параметри використовувати:
  - вхідну послідовність 0 та 1,
  - довжину послідовності  $K$ ,
- Написати функцію, яка генерувала б випадкову послідовностей 0 і 1 довжиною  $K=1000$  (або взяти з попередніх робіт).
- Виконати кодування згенерованої послідовності за допомогою функції згорткового кодера.

Номер варіанта	$R = \frac{k}{n}$	$m$	Що породжує поліном	Застосування
1	$\frac{1}{3}$	3	$7_8, 5_8$ та $3_8$	

Номер варіанта	$R = \frac{k}{n}$	$m$	Що породжує поліном	Застосування
2	$\frac{1}{2}$	4	14 <sub>8</sub> , 17 <sub>8</sub>	
3	$\frac{1}{2}$	4	13 <sub>8</sub> , 15 <sub>8</sub>	
4	$\frac{1}{2}$	4	13 <sub>8</sub> , 17 <sub>8</sub>	
5	$\frac{1}{3}$	4	13 <sub>8</sub> , 15 <sub>8</sub> , 17 <sub>8</sub>	
6	$\frac{1}{2}$	5	23 <sub>8</sub> , 35 <sub>8</sub>	
7	$\frac{1}{3}$	5	25 <sub>8</sub> , 33 <sub>8</sub> , 37 <sub>8</sub>	
8	$\frac{1}{2}$	6	65 <sub>8</sub> , 57 <sub>8</sub>	
9	$\frac{1}{3}$	6	47 <sub>8</sub> , 53 <sub>8</sub> , 75 <sub>8</sub>	
10	$\frac{1}{2}$	7	171 <sub>8</sub> , 133 <sub>8</sub>	Стандартний кодер, вперше використаний NASA в експерименті "Вояджер", протокол 802.16
11	$\frac{1}{2}$	7	155 <sub>8</sub> , 137 <sub>8</sub>	Протокол 802.11b
12	$\frac{1}{2}$	7	100 <sub>8</sub> , 144 <sub>8</sub>	Приклад самоортогонального систематичного згорткового коду
13	$\frac{1}{3}$	7	133 <sub>8</sub> , 171 <sub>8</sub> , 145 <sub>8</sub>	DRM – сучасний стандарт цифрового радіомовлення
14	$\frac{1}{3}$	7	133 <sub>8</sub> , 171 <sub>8</sub> , 165 <sub>8</sub>	LTE
15	$\frac{1}{3}$	7	133 <sub>8</sub> , 175 <sub>8</sub> , 145 <sub>8</sub>	
16	$\frac{1}{2}$	8	345 <sub>8</sub> , 237 <sub>8</sub>	
17	$\frac{1}{3}$	8	225 <sub>8</sub> , 331 <sub>8</sub> , 367 <sub>8</sub>	
18	$\frac{1}{3}$	9	557 <sub>8</sub> , 663 <sub>8</sub> , 711 <sub>8</sub>	
19	$\frac{1}{2}$	9	753 <sub>8</sub> , 561 <sub>8</sub>	
20	$\frac{1}{3}$	9	557 <sub>8</sub> , 663 <sub>8</sub> , 711 <sub>8</sub>	
21	$\frac{1}{4}$	9	771 <sub>8</sub> , 671 <sub>8</sub> , 501 <sub>8</sub> , 473 <sub>8</sub>	cdma2000

Номер варіанта	$R = \frac{k}{n}$	$m$	Що породжує поліном	Застосування
22	$\frac{1}{2}$	10	1167 <sub>8</sub> , 1545 <sub>8</sub>	
23	$\frac{1}{3}$	10	1117 <sub>8</sub> , 1365 <sub>8</sub> , 1633 <sub>8</sub>	

## Вимоги до оформлення звіту

1. Протокол оформляється кожним студентом групи окремо.
2. Протокол повинен містити:
  - a. Титульна сторінка.
  - b. Завдання згідно з варіантом.
  - c. Лістинги програми.
  - d. Результати роботи програми.
  - e. Висновки про виконану роботу.
3. Захист роботи проводиться кожним студентом персонально.

## Контрольні питання

1. Що таке згортковий кодер?
2. Дайте визначення відносної швидкості коду.
3. Які існують способи визначення згорткового кодера?
4. У чому переваги визначення згорткового кодера за допомогою ґратчастої діаграми?
5. Назвіть основні параметри згорткових кодів.