

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Факультет електроніки
Кафедра фізичної та біомедичної електроніки

Ю.С.Синєкоп, Ю.В.Вунтесмері,
М.М.Баран, О.М.Трихліб

Інженерія експерименту

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт
для студентів спеціалізації 09.0804 Фізична та біомедична електроніка

Рекомендовано Вченою радою факультету електроніки НТУУ «КПІ»

Київ – 2012

Синєкоп Ю.С. Інженерія експерименту: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів спеціалізації 09.0804 Фізична та біомедична електроніка / Ю.С.Синєкоп, Ю.В.Вунтєсмері, М.М.Баран., О.М.Трихліб – К. : НТУУ «КПІ», 2012. – 98 с.

*Гриф надано Вченою радою ФЕЛ НТУУ «КПІ»
(протокол № 1/05 від 24.травня .2012 р.)*

*Затверджено на засіданні
кафедри фізичної та біомедичної електроніки
(протокол № 16 від 22 лютого 2012 р.)*

Навчально-методичне видання
ІНЖЕНЕРІЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛІЗАЦІЇ
09.0804 ФІЗИЧНА ТА БІОМЕДИЧНА ЕЛЕКТРОНІКА

Укладачі:

*Юрій Степанович Синєкоп, к.т.н., професор,
професор кафедри фізичної та біомедичної електроніки*

*Юрій Володимирович Вунтєспері, к.т.н., доцент
доцент кафедри фізичної та біомедичної електроніки*

*Михайло Мирославович Баран,
аспірант кафедри фізичної та біомедичної електроніки*

Олександр Миколайович Трихліб

Відповідальний
редактор

В. І. Тимофєєв, д. т. н., проф.

Рецензент:

О. В. Борисов, к. т. н., проф.

За редакцією укладачів

ЗМІСТ

1. АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ПРИ КОНСТРУЮВАННІ ТА ВИРОБНИЦТВІ ВИРОБІВ ЕЛЕКТРОНІКИ ЗА ДОПОМОГОЮ СТАТИСТИЧНИХ МЕТОДІВ.	5
2. ДОСЛІДЖЕННЯ КРИТЕРІЇВ ОЦІНКИ І РОЗРАХУНОК ВІДТВОРЮВАНОСТІ ВИРОБІВ ЕЛЕКТРОНІКИ.	23
3. ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ КОНТРОЛЮ ТА УПРАВЛІННЯ БІОТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ	31
4. ПОБУДУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК)	35
5. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В БІОМЕДИЧНІЙ ЕЛЕКТРОНІЦІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОВНОГО ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ(ПФЕ)	42
6. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ДРОБНОГО ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ (ДФЕ)	54
7. АПРОКСИМАЦІЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В БІОМЕДИЧНІЙ ЕЛЕКТРОНІЦІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРИРОДНОГО КУБІЧНОГО СПЛАЙНУ, ЛІНІЙНОГО ТА НЕЛІНІЙНОГО ЗГЛАДЖУВАНЬ.....	57
8. МАТЕМАТИЧНО – СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА НАДІЙНІСТЮ.	65
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	82
ДОДАТОК І. ЩІЛЬНІСТЬ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛЕННЯ.....	84
ДОДАТОК ІІ. ФУНКЦІЯ ЛАПЛАСА	85

ДОДАТОК III. КРИТЕРІЙ КОХРЕНА	86
ДОДАТОК IV. КРИТЕРІЙ СТ'ЮДЕНТА	88
ДОДАТОК V. КРИТЕРІЙ ФІШЕРА.....	90
ДОДАТОК VI. ФУНКЦІЯ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ	
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$	92
ДОДАТОК VII. ГУСТИНА НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	92
ДОДАТОК VIII. ДОВІРЧІ ГРАНИЦІ ДЛЯ ПАРАМЕТРУ λ РОЗПОДІЛУ	
ПУАСОНА	93
ДОДАТОК IX. ДОВІРЧІ ГРАНИЦІ ДЛЯ ПАРАМЕТРУ P	
БІНОМІАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ. КОЕФІЦІЄНТ ДОВІРИ 0,95.....	95
ДОДАТОК X. ОПИС ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЇ УСТАНОВКИ ДЛЯ	
ПРОВЕДЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ПО КУРСУ: «ІНЖЕНЕРІЯ	
ЕКСПЕРИМЕНТУ»	97

1. АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ПРИ КОНСТРУЮВАННІ ТА ВИРОБНИЦТВІ ВИРОБІВ ЕЛЕКТРОНІКИ ЗА ДОПОМОГОЮ СТАТИСТИЧНИХ МЕТОДІВ.

Мета роботи: ознайомлення з аналізом точності об'єктів статистичними методами, оцінкою функції розподілу випадкових похибок та оцінка ступенем відповідності теоретичних кривих розподілу похибок з практичними спостереженнями. Навчити студентів вмінню оцінювати точність і стійкість процесів при виробництві виробів електроніки.

1.1. Теоретичні відомості

1. При аналізі точності вихідних параметрів об'єкта статистичними методами використовують вибірковий контроль. Для цього вводять поняття генеральної сукупності (ГС), що складається з великого числа N значень x_i (зазвичай $N > 1000$). ГС характеризується наступними основними характеристиками.

Математичним очікуванням

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1.1)$$

і дисперсією

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i (x_i - m)^2. \quad (1.2)$$

Математичне очікування і дисперсія для ГС є константами. На практиці математичне очікування відповідає номінальному значенню досліджуваного об'єкта. А величина $m \pm 3\sigma$ допуском на параметри цього виробу, який зазвичай задається замовником.

2. З ГС формують вибірку об'ємом n . Об'єм вибірки визначають за допомогою наступної формули:

$$a) \quad n = \frac{t^2 \sigma^2}{\varepsilon^2}, \quad (1.3)$$

де t – критерій Стьюдента, що вибирається з таблиці (додаток IV), який залежить від очікуваної ймовірності результату (рівня значущості α) і числа ступенів свободи $\nu = n - 1$, а ε – допустима похибка, наприклад, у визначенні середнього значення \bar{x} по вибірці: $\bar{x} - m \leq \varepsilon$

б) Якщо $\varepsilon < 0,2$, то

$$n = \frac{t^2}{\varepsilon^2}; \quad (1.4)$$

Якщо $\varepsilon > 0,2$ то n можна визначити по наступній формулі:

$$n = t^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{b}{\varepsilon} + c \right), \quad (1.5)$$

де коефіцієнти b, c, i та t залежать від довірчої ймовірності чи рівня значущості α (таблиця 1.1)

Таблиця 1.1

Довірча ймовірність, P	0,8	0,95	0,975	0,99	0,999
Рівень значущості, α	0,2	0,05	0,025	0,01	0,001
b	0,142	0,022	0,05	0,008	0,003
c	1,12	0,688	0,612	0,556	0,486
t	1,28	1,96	2,2	2,58	3,03

3. Вибірку заданого об'єму вибирають випадково, тому всі числові характеристики вибірки \bar{x} і S^2 є випадковими характеристиками зі своїми розподілами. Де \bar{x} - середнє значення випадкової величини, знаходиться за вибіркою об'ємом n за допомогою наступного виразу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.6)$$

За допомогою \bar{x} оцінюється наближено $\bar{x} - m < \varepsilon$ математичне очікування m випадкової величини. А S^2 є оцінкою дисперсії

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.7)$$

Ця величина змінюється від вибірки до вибірки. Є випадковою на відміну від дисперсії σ^2 для ГС.

Вибірки бувають великими і малими. Для малої вибірки $n < 25$ вводять поняття числа ступенів свободи $\nu = n - 1$ та рекомендують для цих випадків оцінку дисперсії визначати за формулою:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.8)$$

Об'єм малих вибірок рекомендують у межах $n = (20 \div 25)$ значень досліджуваного параметру.

Для визначення закону розподілу похибок вихідних параметрів об'єкту застосовують великі вибірки з рекомендованим об'ємом $n = (100 \div 150)$.

4. Великі вибірки. Отримані експериментальні значення випадкової величини X x_i $X = \{x_1, x_2 \dots x_i \dots x_n\}$ утворюють статистичний ряд (таблиця 1.2). Якщо значення x_i розташувати по зростаючому чи спадаючому порядку, то такий ряд називають варіаційним (таблиця 1.3). Варіаційний ряд виражає закономірності досліджуваного процесу і показує яким чином числові значення ознаки пов'язані з частотою їх появи.

Таблиця 1.2. Приклад статистичного ряду; $n = 67$.

4.2	4.3	3.4	2.6	4.4	4.1	4.8	3.7	3.8	3.6
3.2	3.0	5.4	4.4	3.5	4.2	4.1	4.3	4	3.7
5.0	4.7	3.9	3.7	4.5	4.3	3.9	3.6	3.7	4.0
3.6	4.8	4.5	3.2	3.6	4.1	4.5	4.4	4.6	3.2
4.5	3.7	5.0	3.1	4.5	4.2	4.1	4.1	4.0	3.9
4.3	4.4	4.1	4.2	4.2	3.3	4.5	4.2	4.7	3.7
3.5	4.1	3.8	4.9	4.0	3.8	3.5	-	-	-

Таблиця 1.3. Варіаційний ряд; $n = 67$.

x_i	h_i	x_i	h_i	x_i	h_i	x_i	h_i
2.6	1	3.5	3	4.1	7	4.7	1
3.0	1	3.6	4	4.2	6	4.8	2
3.1	1	3.7	6	4.3	4	4.9	1
3.2	3	3.8	3	4.4	3	5.0	2
3.3	1	3.9	3	4.5	6	5.1	1
3.4	1	4.0	4	4.6	1	5.4	1

У цій таблиці x_i – значення ознаки; h_i – частота появи ознаки в цьому ряду.

Варіаційний ряд зображують у вигляді полігону частот. Полігон частот будується в прямокутній системі координат. По осі абсцис відкладають значення досліджуваного параметра, а по осі ординат - відповідну йому частоту. З'єднавши нанесені точки, отримують ламану, яку називають полігоном частот (рис. 1.1). На рис. 1.1 побудований полігон частот для таблиці 1.3.

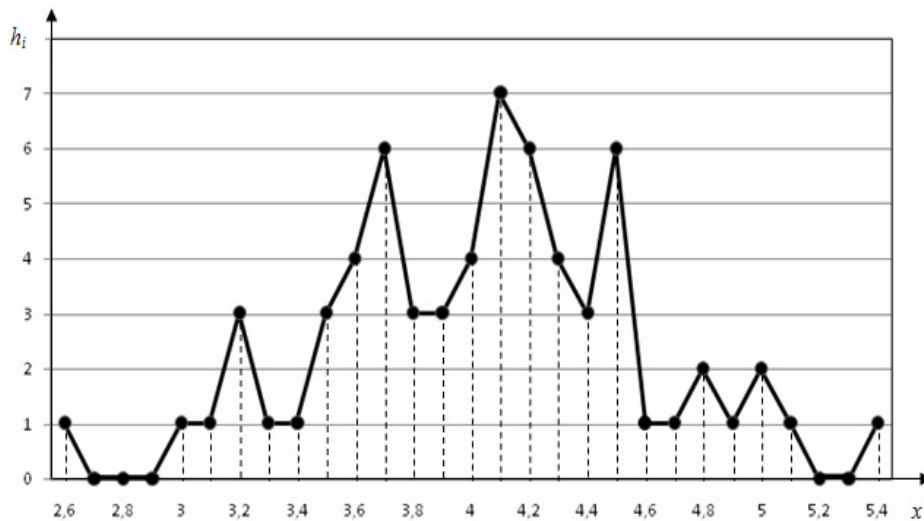


Рис. 1.1. Приклад зображення варіаційного ряду у вигляді полігону частот.

Полігон частот дозволяє знайти розмах $R = x_{\max} - x_{\min}$, де x_{\max} – максимальне значення ознаки в даному ряду; x_{\min} – мінімальне значення ознаки. Для нашого прикладу $x_{\max} = 5.4$; $x_{\min} = 2.6$, а $R = 5.4 - 2.6 = 1.8$. Ця величина пропорційна оцінці середнього квадратичного відхилення і на практиці середньоквадратичне відхилення можна розрахувати за формулою

$$S = \frac{\bar{R}}{d_1},$$

де \bar{R} - середнє значення розмахів, знайдене по вибірках з ГС; а d_1 – коефіцієнт визначений з таблиці 1.4 і залежний від числа значень у вибірці .

Таблиця 1.4

n	2	10	20	30	50	70	100	200
d_1	2.32	3.078	3.735	4.086	4.498	4.75	5.015	5.6

Для нашого випадку з однієї і тієї ж ГС були взяті три вибірки по 67 значень у кожній вибірці і отримані розмахи $R_1 = 2.4$; $R_2 = 1.8$; $R_3 = 2.2$.

Звідки
$$\bar{R} = \frac{2.4 + 1.8 + 2.2}{3} = 2.13.$$

З таблиці 1.4 для $n = 67$ знаходимо $d \approx 4.75$, и $S = \frac{2.13}{4.75} \approx 0.448 \approx 0.45$.

Як показали обчислення, проведені нижче, значення S для вибірки наведеної в таблиці 1.2 $S = 0.51$. Ці значення 0.45 і 0.51 є близькими одне до одного.

По полігону частот можна приблизно визначити моду M_0 , величину, що найбільш часто зустрічається в сукупності. Вона в якійсь мірі оцінює середнє значення і в нашому

випадку $M_0 = 4.1$. Це значення зустрічається у прикладі найбільш часто, сім разів. Середнє значення розраховане за даними таблиці 1.2 нижче $\bar{x} = 4.1$.

За допомогою варіаційності ряду можна визначити медіану M_e - середнє значення відносно якого ранжирований ряд розподіляється на дві рівні частини: в обидві сторони від M_e розташовується однакове число варіант (значень). Якщо число ранжированих значень ознаки в ряді непарне, то медіана дорівнює середньому значенню, а якщо парне - напівсумі середніх значень ранжированого ряду. Для нашого прикладу ранжирований ряд має вигляд: 2.6; 3.0; 3.1; 3.2; 3.2; 3.2; 3.3; 3.4; 3.5; 3.5; 3.5; 3.6; 3.6; 3.6; 3.6; 3.7; 3.7; 3.7; 3.7; 3.7; 3.7; 3.8; 3.8; 3.8; 3.9; 3.9; 3.9; 4.0; 4.0; 4.0; 4.0; 4.1; 4.1; 4.1; 4.1; 4.1; 4.1; 4.1; 4.1; 4.2; 4.2; 4.2; 4.2; 4.2; 4.2; 4.3; 4.3; 4.3; 4.3; 4.4; 4.4; 4.4; 4.5; 4.5; 4.5; 4.5; 4.5; 4.5; 4.6; 4.7; 4.8; 4.8; 4.9; 5.0; 5.0; 5.1; 5.4.

Ряд непарний, тому M_e є 34-тим за рахунком значенням і $M_e = 4.1$, вона збігається з середнім значенням. Розподіл вихідних даних у варіаційний ряд переслідує певні цілі. Одна з них - прискорення роботи при обчисленні \bar{x} та S^2 .

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i h_i \quad (1.9)$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i \quad (1.10)$$

де k – число згрупованих значень за частотами h_i . Інша зводиться до виявлення закономірностей варіювання досліджуваної ознаки. Для цього будуються гістограми. Коли по осі абсцис відкладаються не точки, а відрізки, які відповідають інтервалам d . На кожному з інтервалів будують прямокутники, висота яких пропорційна відповідним частотам h_i . Площа прямокутника в такому випадку дорівнює попаданню події в даний інтервал. Приступаючи до побудови рівноінтервального ряду, важливо правильно призначити ширину інтервалу.

Якщо інтервал широкий - спотворюються типові риси варіювання і знижується точність обчислення числових характеристик. Якщо інтервал вузький, то точність визначення характеристик підвищується, але ряд виходить розтягнутим і не дає чесної картини варіювання.

На практиці ширина інтервалу вибирається так, щоб число попадання ознаки в даний інтервал була не менше 5. Величина інтервалу d знаходиться з наступного виразу

$$d = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.32 \lg n}.$$

Якщо $n > 100$, то

$$d = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{5 \lg n}.$$

На практиці число інтервалів рекомендується в межах $6 \div 10$. Нижня межа першого інтервалу відповідає формулі $x_n = x_{\min} - \frac{d}{2}$. Для нашого прикладу (таблиця 1.5) $d = 0.4$; число інтервалів рівне 8.

$$x_n = 2.6 - \frac{0.4}{2} = 2.4 .$$

Додавши до цього числа $d = 0.4$ отримуємо верхню межу першого інтервалу

$$x_6 = 2.4 + 0.4 = 2.8$$

Потім визначаються верхні межі наступних інтервалів: $2.8+0.4 = 3.2$; $3.2+0.4 = 3.6$; 4 ; 4.4 ; 4.8 ; 5.2 ; 5.6 . Для того щоб вирішити питання, в які класи відносити ознаки, які по своїй величині співпадають з верхньою межею одного інтервалу і нижньою межею іншого поступають таким чином: верхні межі зменшують на величину рівну точності прийнятій при вимірюванні ознаки. Якщо для нашого випадку ця точність $\varepsilon = 0,01$. Тоді відповідні інтервали матимуть вигляд:

Таблиця 1.5

Межі інтервалів	Числові значення середини інтервалів x_m	Частоти h_i
2.4-2.79	2.6	1
2.8-3.19	3	2
3.2-3.59	3.4	8
3.6-3.99	3.8	16
4.0-4.39	4.2	21
4.4-4.79	4.6	13
4.8-5.19	5	5
5.2-5.6	5.4	1
Всього		67

Гістограма побудована за даними таблиці 1.5 показана на рис.1.2.

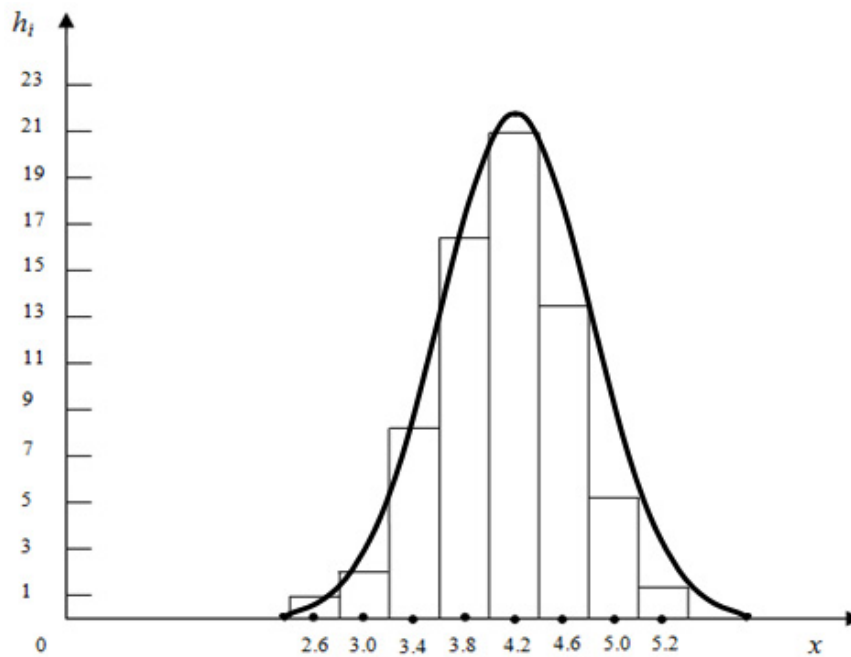


Рис.1.2. Приклад зображення варіаційного ряду у вигляді гістограми та теоретичної кривої нормального розподілу.

Наступний крок веде до заміни інтервалів їх середніми значеннями, (серединою інтервалів) $x_m = \frac{x_{ni} + x_{vi}}{2}$, де x_{ni} і x_{vi} - нижня і верхня межа i – го інтервалу. Для першої строки

$x_m = \frac{2.4 + 2.8}{2} = 2.6$. Значення x_m для всіх інтервалів представлені в таблиці 1.5.

Середнє значення розраховується за формулою (1.9), де h_i частота попадання події в i – ий інтервал з модальним значенням x_{mi} (таблиця 1.5)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{67} (2.6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3.4 \cdot 8 + 3.8 \cdot 16 + 4.2 \cdot 21 + 4.6 \cdot 13 + 5.0 \cdot 5 + 5.4 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{67} (2.6 + 6 + 27.2 + 60.8 + 88.2 + 59.8 + 25 + 5.4) = \frac{275}{67} \approx 4.1 \end{aligned}$$

Оцінка дисперсії знайденої за формулою (1.10) має наступне значення

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{67} \left[(2.6 - 4.1)^2 + (3 - 4.1)^2 + (3.4 - 4.1)^2 + (3.8 - 4.1)^2 + (4.2 - 4.1)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (4.6 - 4.1)^2 + (5 - 4.1)^2 + (5.4 - 4.1)^2 \right] = 0.265 \\ S &= 0.515 \end{aligned}$$

Отримані значення \bar{x} і S^2 є точковими оцінками математичного очікування і дисперсії знайдених за вибіркою. Очевидно, що від вибірки до вибірки \bar{x} і S^2 будуть змінюватися. І тому викликає інтерес в яких межах змінюватимуться ці значення? Або як визначити довірчий інтервал для \bar{x} і S^2 знайдених по вибірках взятих з конкретної ГС.

Довірчий інтервал для \bar{x} визначається з виразу

$$\bar{x} - \frac{t_{\alpha, \nu} \cdot S}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + \frac{t_{\alpha, \nu} \cdot S}{\sqrt{n}},$$

де $t_{\alpha, \nu}$ - значення критерію Стюдента, знайдене з таблиць додатка (IV) за рівнем значущості α і числу ступенів свободи ν . Для $\alpha=0,05$ $t=1.96$; $\bar{x} = 4.1$; $S = 0.515$ довірчий інтервал становитиме

$$4.1 \pm 1.96 \cdot \frac{0.515}{\sqrt{67}} \approx 4.1 \pm 0.127$$

або

$$3.97 \leq \bar{x} \leq 4.3.$$

Це означає що коли з ГС береться 100 вибірок, то для $\alpha = 0,05$ (5%) у 95 з них середнє значення буде перебувати в межах $3.97 \leq \bar{x} \leq 4.3$. Довірчий інтервал для S визначається з виразу:

$$S \pm \frac{S\sqrt{n-1}}{\chi^2},$$

де χ^2 - критерій Пірсона, який знаходиться з таблиці (Додаток IV) за заданим α і числом ступенів свободи.

5. Побудова теоретичного закону розподілу за даними експерименту.

Функція нормального розподілу має вигляд

$$y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.11)$$

де m – математичне очікування, σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини. На практиці вводиться величина

$$\lambda = \frac{x-m}{\sigma} \quad (1.12)$$

Беручи до уваги ширину інтервалу d , з урахуванням (1.12) рівняння (1.11) набуде вигляду:

$$y(\lambda) = \frac{d}{\sigma} \varphi(\lambda), \text{ где } \varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}, \quad (1.13)$$

де $\varphi(\lambda)$ – щільність нормованого нормального закону з нульовим математичним очікуванням і $\sigma=1$. Значення $\varphi(\lambda)$ табульованні і наведені в таблиці (Додаток І).

За допомогою $\varphi(\lambda)$ можна визначити нормальний розподіл для будь-яких значень математичного очікування m й середнього квадратичного відхилення σ .

У таблиці 1.6 наведено форму представлення даних дослідження при розрахунку теоретичної кривої нормального розподілу.

Таблиця 1.6. Форма подання даних для розрахунку теоретичної кривої нормального розподілу

x_M	$x_M - \bar{x}$	$\frac{x_M - \bar{x}}{S}$	$\varphi(\lambda)$	Відносні частоти		Абсолютні частоти	
				$(y(\lambda)100), \%$	$f_{\text{емп}}, \%$	$h_{\text{теор}}$	$h_{\text{емп}}$
1	2	3	4	5	6	7	8

$$y(\lambda) = \frac{\Delta x}{s} \cdot \phi(\lambda)$$

Приклад. Побудувати теоретичну криву нормального розподілу для даних, наведених в таблицях (1.2; 1.7)

Таблиця 1.7

1	2	3	4	5	6		7		8
N	x_M	$x_M - \bar{x}$	$\frac{x_M - \bar{x}}{S}$	$\varphi(\lambda)$	Відносні частоти		Абсолютні частоти		h_i
					$(y(\lambda)100), \%$	$f_{\text{емп}}, \%$	$h_{\text{емп}}$	$h_{\text{теор}}$	
1	2.6	-1.5	-2.913	0.0058	0.44	1.5	1	0.3	1
2	3.0	-1.1	-2.13	0.0413	3.19	3	2	0.6	2
3	3.4	-0.7	-1.36	0.1582	12.18	11.9	8	8	8
4	3.8	-0.3	-0.58	0.3372	25.96	23.88	16	17	16
5	4.2	0.1	0.19	0.3918	30.19	31.3	21	21	21
6	4.6	0.5	0.97	0.2492	19.19	19.4	13	14	13
7	5.0	0.9	1.75	0.0863	6.62	7.46	5	5	5
8	5.4	1.3	2.52	0.0167	0.91	1.5	1	1	1
Σ					100%		67	67	67

Середнє значення для цього випадку становить: $\bar{x} = 4.1$; оцінка СКВ: $S = 0.515$;

$$\frac{d}{S} = \frac{0.4}{0.515} \approx 0.78$$

Значення $h_{теор}$ отримують множенням 5 стовпця на число досліджень. В нашому випадку $n = 67$.

За даними таблиці 1.7 будемо теоретичний закон нормального розподілу за даними експерименту. Значення $h_{теор}$ із стовпця 7 таблиці 1.7 наносимо на гістограму рис. 1.2.

6. Перевірка відповідності теоретичного закону розподілу даних експерименту.

Відповідність емпіричного закону розподілу теоретичному нормальному закону розподілу перевіряється за допомогою критерію Пірсона χ^2 , який є відношенням суми квадратів відхилення емпіричних частот $h_{емп}$ від теоретичних – $h_{теор}$ до теоретичних частот $h_{теор}$:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(h_{емп} - h_{теор})^2}{h_{теор}}, \quad (1.14)$$

де k – число інтервалів.

Для розрахунку χ^2 зручно використовувати дані таблиці 1.8. Оскільки вибірка для побудови гістограми та закону розподілу мала ($n = 67$), то в інтервалах 1, 2, 8 спостерігається число влучань менше 5. Тому при побудові теоретичного закону розподілу інтервали 1, 2 об'єднуємо в один.

Таблиця 1.8.

N	$h_{емп}$	$h_{теор}$	$h_{емп} - h_{теор}$	$(h_{емп} - h_{теор})^2 / h_{теор}$
1	1	0.3	2	4
2	2	0.6		
3	8	8	0	0
4	16	17	1	0.05
5	21	21	0	0
6	13	14	1	0.07
7	5	5	0	0
8	1	1	0	0

Тоді

$$\chi_{експ}^2 = \frac{(h_{емп} - h_{теор})^2}{h_{теор}} = \frac{(3-1)^2}{1} + \frac{(8-8)^2}{8} + \frac{(16-17)^2}{17} + \frac{(21-21)^2}{21} + \frac{(13-14)^2}{14} + \frac{(5-5)^2}{5} + \frac{(1-1)^2}{1} = 4.35$$

За таблицею, поданою у додатку VI, для рівня значущості $\alpha = 0.05$ і числа ступенів свободи $\nu = k-1 = 8 - 1 = 7$ знаходимо теоретичне значення критерію Пірсона.

$$\chi_{\alpha, \nu}^2 = 14.1$$

Оскільки $\chi_{експ}^2$ менше $\chi_{\alpha, \nu}^2$, то робиться висновок про відповідність даних експерименту нормальному закону розподілу.

7. Точність, відтворюваність.

Якість функціонування будь-якого пристрою прийнято характеризувати точністю відповідності його функціональних параметрів їх номінальному значенню. Точність функціонування оцінюється похибкою – різницею отриманого x та номінального x_n значень $\Delta x = x - x_n$ і регламентується допуском на параметр. Допуск – це поле розсіювання похибки параметру, що визначається з умов забезпечення необхідної точності роботи виробу та функціональної взаємозамінюваності. Розрахунок функціональної точності зводиться до розрахунку та призначення допусків на параметри елементів і вузлів, при яких поле допуску Δ_N на кожний вихідний параметр пристрою більше або рівне полю розсіювання похибки: $\delta_N \leq \Delta_N$. Тобто при розрахунку функціональної точності проводиться узгодження взаємного розміщення поля допуску та поля розсіювання похибки.

Під відтворюваністю пристрою розуміють його властивість повторювати параметри від виробу до виробу в процесі виготовлення. Значення параметрів обумовлюються технічними умовами (ТУ).

На рис. 1.3 приведені можливі відхилення досліджуваного параметру від номінального значення x_n . У першому випадку рис. 1.3а $x = x_n$ і поле розсіювання параметру x рівне полю допуску, проте процес не можна вважати стійким. Оскільки будь-які зміни при експлуатації виробу (зміна вологості, температури і т.д.) призводять до порушення рівноваги $x \neq x_n$ і $\delta \neq \Delta$ та виводять параметри виробу за межі поля допуску.

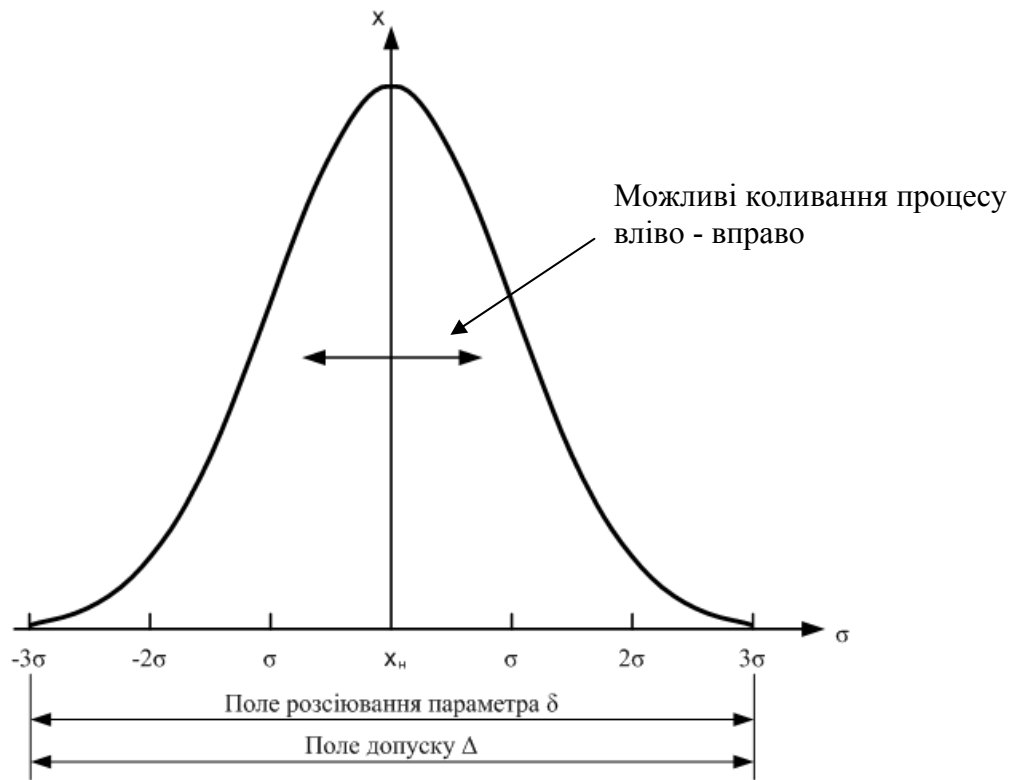
У випадку рис. 1.3б $x = \bar{x}_n$, але процес не являється стійким, оскільки $\delta > \Delta$.

В третьому випадку рис. 1.3в вихідні параметри виробу не виходять за межі допуску навіть якщо їх середнє значення змінюється вліво чи вправо відносно x в межах $\pm\sigma$. Такий процес є стійким.

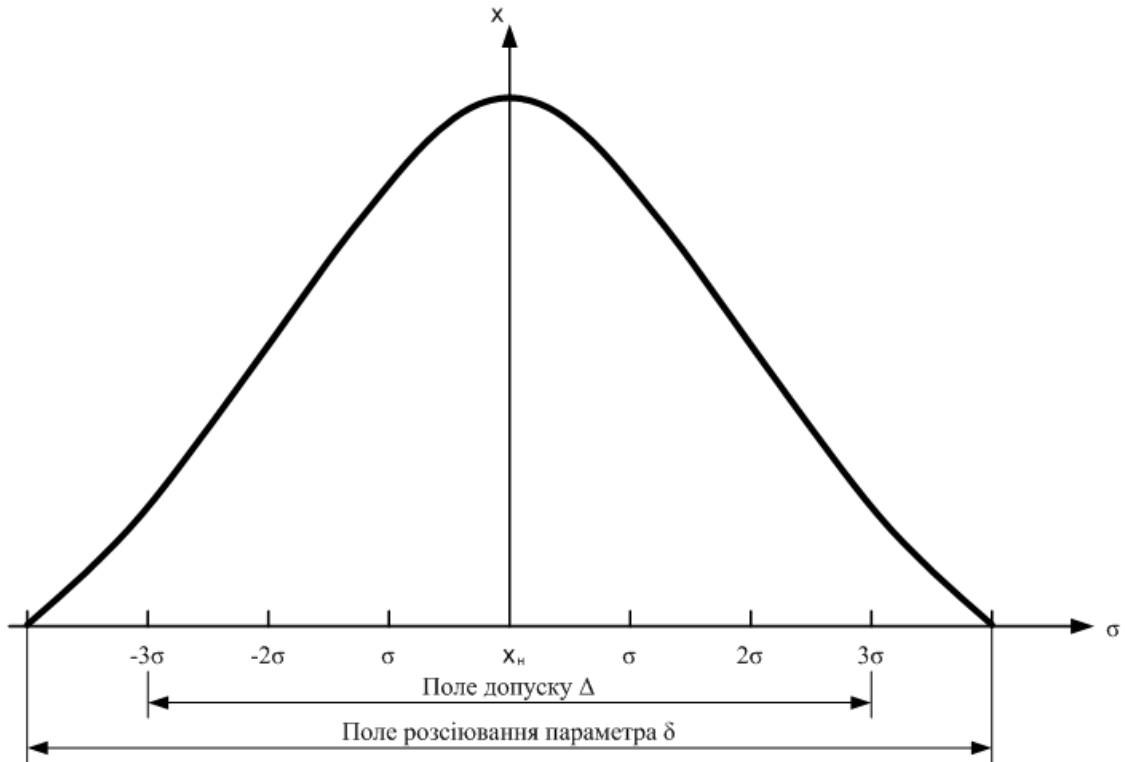
Для оцінки стійкості процесу (стійкості вихідних параметрів виробу) використовують коефіцієнт K_1 зміщення процесу відносно середини поля допуску

$$K_1 = \frac{(\bar{x} - x_n)}{2\Delta},$$

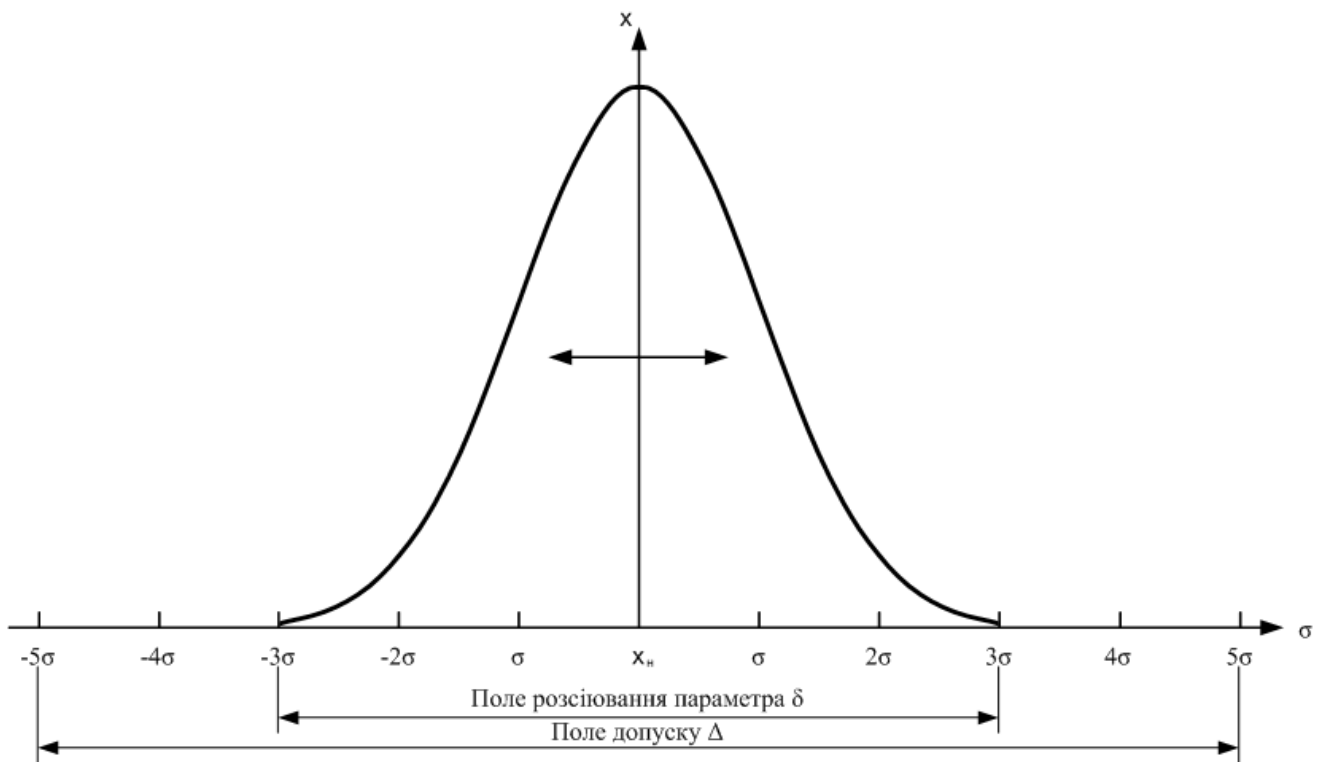
де \bar{x} - середнє арифметичне значення спостерегаємого параметру, середньоквадратичне відхилення якого рівне σ ; 2Δ – величина допуску в одиницях σ .



а) Приклад квазістійкого процесу: $\Delta = \delta$.



б) Приклад нестійкого процесу: $\delta > \Delta$



в) Приклад ідеального стійкого процесу

Рис. 1.3 Можливі відхилення досліджуваного параметру від номінального значення x_n .

Для оцінки точності процесу використовують коефіцієнт K_2

$$K_2 = \frac{2\delta}{2\Delta};$$

значення δ і Δ оцінюються в одиницях σ .

При нормальному законі розподілу значень вихідного параметру $2\delta = 6\sigma$, що відповідає ймовірності $p = 0.9973$. При цьому вважають, що якщо $0,6 \leq K_2 \leq 0,85$, то точність процесу достатня і відповідає вимогам статистичного контролю.

Якщо $K_2 > 0,85$, то в цьому випадку для виготовлення виробів електроніки необхідно використовувати більш високоточні технології, або розширювати межі поля допуску. Якщо $K_2 < 0,6$, то точність процесу є надмірною. По числовим значенням K_1 і K_2 можна прогнозувати імовірнісний процент браку.

Ступінь стійкості процесу виготовлення виробів електроніки (вихідних параметрів) оцінюється коефіцієнтом K_3

$$K_3 = \frac{\sigma_0}{\sigma}$$

де σ_0 – моментальне значення середньоквадратичного відхилення. Процес вважається стійким якщо $K_3 \rightarrow 1$.

8. Довірча оцінка статистичних даних.

Об'єм статистичних даних завжди обмежений. І основні характеристики \bar{x} і S^2 , знайдені по вибірці як правило відрізняються одна від одної, хоча вибірки взяті з однієї й тієї ж ГС. Інженеру необхідно мати кількісну оцінку впевненості, що: 1) знайдені значення \bar{x} і S^2 , не дивлячись на свої відмінності по величині, властиві для даної ГС; 2) і те, що об'єм експерименту достатній для об'єктивного визначення \bar{x} і S^2 . З цією метою вводиться поняття довірчого інтервалу значень параметру. Якщо всі значення \bar{x} , знайдені по вибірці знаходяться всередині довірчого інтервалу, побудованого з заданою довірчою ймовірністю $p = 1 - \alpha$, то це означає, що вони відносяться до одного і того ж процесу з математичним очікуванням m і їх відмінності є випадковими.

Верхня та нижня границі довірчого інтервалу для середнього значення визначаються за формулою

$$\bar{x}_n = \bar{x} + t \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (1.15)$$

де t – параметр розподілу Стюдента, взятий з таблиці IV додатку, по заданому рівню α і числу ступенів свободи $(n-1)$.

Довірчий інтервал для оцінки дисперсії знаходимо з виразу

$$S_a^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}; S_n^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}$$

де χ_1^2 і χ_2^2 знаходяться по α і числу ступенів свободи з таблиці VI додатку.

1.2. Виконання роботи:

З партії резисторів в $N=1000$ штук беруться в випадковому порядку вибірки в $n=75$ штук резисторів. Після чого вимірюються їхні номінали і резистори повертаються в початкову партію, партія ретельно перемішується і витягається наступна вибірка в 75 резисторів і т.д. Значення опорів в кОм по 75 вибірках представлені в додатку до лабораторної роботи. За заданим варіантом вибрати з додатку свій варіант і провести наступні розрахунки

1. Провести ранжирування даних досліджень, побудувати варіаційний ряд.
2. За даними експерименту знайти R , M_o , M_e .
3. Побудувати полігон частот і гістограму.
4. За даними варіаційного ряду знайти \bar{x} і S^2 , коефіцієнт варіації.
5. За даними експерименту визначити статистичний допуск.
6. Визначити до якого класу точності належать резистори?

7. Побудувати теоретичну криву розподілу.
8. Перевірити відповідність теоретичної кривої розподілу даним експерименту.
9. Зробіть висновки по результатах вимірювань, якщо за вимогою замовника номінальне значення опору повинно становити $m = 50\text{кОм}$ і його середньоквадратичне відхилення $2,5\text{кОм}$.
10. У звіті подати алгоритм розв'язку задачі. Програмне забезпечення. Аналіз отриманих результатів. Висновки по роботі. Графіки полігону частот, гістограми, теоретичного закону розподілу.

1.3. Контрольні запитання:

1. Що називається статистичним рядом?
2. Чи існує різниця між середнім значенням та математичним очікуванням?
3. Що розуміють під вибіркою?
4. Як визначають довірчі інтервали для середнього значення і дисперсії?
5. Як будується гістограма по даним випробувань?
6. Що розуміють під точністю процесу?
7. Що розуміють під умовним середнім?
8. Розмах, медіана, коефіцієнт варіації – області застосування.
9. Як проводиться перевірка однорідності дисперсії?
10. Що розуміють під параметрами нормального розподілу?
11. Що розуміють під довірчими оцінками?
12. Сформулюйте правило трьох сигм.
13. Які основні властивості довірчих і точкових оцінок?
14. Як вибирають необхідну кількість вимірювань при дослідженнях в електроніці?

1.4. Додаток до лабораторної роботи № 1.

	А	Б	В	Г	Д
1	55 60 42 43 65 30 47 47 41 52 49 44 57 61 54 50 47 57 52 40 69 47 50 58 58 59 72 47 39 39 54 57 39 57 49 57 59 39 45 33 70 64 49 48 62 52 55 55 60 46 35 54 42 34 49 35 36 49 37 38 42 48 34 54 51 70 39 44 41 41 50 62 43 47 49	61 64 47 54 63 53 62 56 52 51 64 36 43 52 49 47 40 35 61 38 40 55 49 62 64 57 43 51 42 51 50 58 50 52 42 51 49 65 56 67 56 37 63 49 32 43 59 63 50 53 52 50 68 48 47 60 43 34 51 40 45 38 37 47 47 33 51 58 56 25 67 47 64 45 54	48 57 50 53 54 31 48 55 53 60 58 63 47 42 65 53 51 43 46 57 44 53 45 54 46 52 44 40 57 45 37 53 30 33 59 50 40 39 38 45 55 57 77 44 40 46 40 28 46 43 48 46 49 55 52 47 51 36 47 56 55 50 39 43 55 49 56 44 55 59 52 36 62 49 32	48 29 52 55 63 67 64 44 53 69 32 53 44 36 45 49 63 53 40 45 66 41 43 60 61 45 51 58 76 48 59 42 62 39 51 60 66 71 73 61 46 48 50 37 34 55 53 42 26 69 41 51 36 53 68 56 46 50 38 47 49 48 52 61 48 39 58 39 36 57 58 50 42 41 66	49 44 51 70 54 50 35 48 23 52 45 29 37 66 44 52 66 31 59 44 47 45 53 56 59 42 55 51 53 58 41 30 48 54 46 50 49 62 34 35 62 41 40 38 34 63 24 41 41 46 36 64 50 67 37 48 51 54 55 28 54 47 45 57 51 46 57 50 45 54 58 35 45 65 53
2	42 55 51 53 58 41 30 48 54 46 50 49 62 34 35 62 41 40 38 34 63 34 41 41 46 48 57 50 53 54 31 48 55 53 60 58 63 47 42 65 53 51 43 46 57 44 53 45 54 46 52 44 40 57 45 37 53 30 33 59 50 40 39 38 45 55 57 77 44 40 46 40 28 46 43 52 44 40 57 45 37 53 30 33 59 50 40 39 38 45 55 57 77 44 40 46 40 28 46 43	48 57 50 53 54 31 48 55 53 60 58 63 47 42 65 53 51 43 46 57 44 53 45 54 46 52 44 40 57 45 37 53 30 33 59 50 40 39 38 45 55 57 77 44 40 46 40 28 46 43 48 46 49 55 52 47 51 36 47 56 49 56 44 55 59 52 36 62 49 32	44 42 60 44 49 44 48 52 48 56 56 63 58 52 60 36 37 42 39 38 57 55 66 61 40 48 29 52 55 63 67 64 44 53 69 32 53 44 36 45 49 63 53 40 45 66 41 43 60 61 45 51 58 76 48 59 42 62 39 51 60 66 71 73 61 46 48 50 37 34 55 53 42 26 69	48 54 58 47 45 49 45 57 46 43 53 49 44 59 49 48 47 48 46 53 47 51 47 50 50 58 52 54 38 51 57 44 56 49 45 48 47 63 48 51 54 44 48 53 40 41 53 54 50 52 42 50 52 47 55 50 48 53 45 56 43 54 55 47 43 49 48 61 52 42 43 45 52 53 51	48 29 52 55 63 67 64 44 53 69 32 53 44 36 45 49 63 53 40 45 66 41 43 60 61 59 72 47 39 39 54 57 39 57 49 57 59 39 45 33 70 64 49 48 62 52 55 55 60 46 44 42 60 44 58 44 48 52 48 56 56 63 58 52 60 36 37 42 39 38 57 55 66 61 40

3	55 60 42 43 65 30 47 47 41 52 49 44 57 61 54 50 47 57 52 40 69 47 50 58 58 42 55 51 53 58 41 30 48 54 46 50 49 62 34 35 62 41 40 38 34 63 24 41 41 46 61 64 47 54 63 53 62 56 52 51 64 36 43 52 49 47 40 35 61 38 40 55 49 62 64	48 29 52 55 63 67 64 44 53 69 49 63 53 40 45 66 41 43 60 61 45 51 58 76 48 59 42 62 39 51 60 66 71 73 61 55 53 42 26 69 56 46 50 38 47 49 48 52 61 48 39 58 39 36 57 58 50 42 41 66 62 64 46 41 68 65 45 46 46 49 68 59 60 60 33	52 44 40 57 45 37 53 30 33 59 50 40 39 38 45 55 57 77 44 40 46 40 28 46 43 52 50 68 48 47 60 43 34 51 40 45 38 37 47 47 33 51 58 56 25 67 47 64 45 54 45 51 58 76 48 59 42 62 39 51 60 66 71 73 61 46 48 50 37 34 55 53 42 26 69	36 64 50 67 37 48 51 54 55 28 54 47 45 57 51 46 57 50 45 54 30 47 47 41 52 49 44 57 61 54 50 47 57 52 40 59 72 47 39 39 54 57 39 57 49 57 59 39 45 33 70 64 49 48 62 35 54 42 34 49 42 48 34 54 51 70 39 44 41 41 50 62 43 47 49	48 29 52 55 63 67 64 44 53 69 32 53 44 36 45 49 63 53 40 45 66 41 43 60 61 45 51 58 76 48 59 42 62 39 51 60 66 71 73 61 46 48 50 37 34 55 53 42 26 69 72 49 59 55 52 51 53 50 46 63 50 27 61 48 51 59 37 54 46 59 41 47 44 75 48
4	61 64 47 54 63 53 62 56 52 51 64 36 43 52 49 47 40 35 61 38 40 55 49 62 64 57 43 51 42 51 50 58 50 52 42 51 49 65 56 67 56 37 63 49 32 43 59 63 50 53 52 50 68 48 47 60 43 34 51 40 45 38 37 47 47 33 51 58 56 25 67 47 64 45 54	45 48 45 64 51 58 60 52 38 38 48 35 43 33 54 51 31 43 42 56 58 38 57 59 52 48 57 50 53 54 31 48 55 53 60 58 63 47 42 65 53 51 43 46 57 44 53 45 54 46 44 42 60 44 58 44 48 52 48 56 56 63 58 52 60 36 37 42 39 39 57 55 66 61 40	52 44 40 57 45 37 53 30 33 59 50 40 39 38 45 55 57 77 44 40 46 40 28 46 43 48 46 49 55 52 47 51 36 47 56 55 50 39 43 55 49 56 44 55 59 52 36 62 49 32 74 53 71 53 32 54 56 46 43 56 61 61 61 67 60 56 46 56 62 65 54 53 50 56 43	59 72 47 39 39 54 57 39 57 49 57 59 39 45 33 70 64 49 48 62 52 55 55 60 46 35 54 42 34 49 35 36 49 37 38 42 48 34 54 51 70 39 44 41 41 50 62 43 47 49 72 49 59 55 52 51 53 50 46 63 50 27 61 48 51 59 37 54 46 59 41 47 44 75 48	57 43 51 42 51 50 58 50 52 42 51 49 65 56 67 56 37 63 49 32 43 59 63 50 53 52 50 68 48 47 60 43 34 51 40 45 38 37 47 47 33 51 58 56 25 67 47 64 45 54 45 48 45 64 51 58 60 52 38 38 48 35 43 33 54 51 31 43 42 56 58 38 57 59 52
	А	Б	В	Г	Д
5	45 51 58 76 48 59 42 62 39 51 60 66 71 73 61 46 48 50 37 34 55 53 42 26 69 41 51 36 53 68 56 46 50 38 47 49 48 52 61 48 39 58 39 36 57 58 50 42 41 66	49 44 51 70 54 50 35 48 23 52 45 29 37 66 44 52 66 31 59 44 47 45 53 56 59 61 64 47 54 63 53 62 56 52 51 64 36 43 52 49 47 40 35 61 38 40 55 49 62 64	36 64 50 67 37 48 51 54 55 28 54 47 45 57 51 46 57 50 45 54 58 35 45 65 53 55 60 42 43 65 30 47 47 41 52 49 44 57 61 54 50 47 57 52 40 69 47 50 58 58	42 55 51 53 58 41 30 48 54 46 50 49 62 34 35 62 41 40 38 34 63 24 41 41 46 48 57 50 53 54 31 48 55 53 60 58 63 47 42 65 53 51 43 46 57 44 53 45 54 46	36 64 50 67 37 48 51 54 55 28 54 47 45 57 51 46 57 50 45 54 58 35 45 65 53 55 60 42 43 65 30 47 47 41 52 49 44 57 61 54 50 47 57 52 40 69 47 50 58 58

62 64 46 41 68	49 44 51 70 54	44 42 60 44 58	35 54 42 34 49	59 72 47 39 39
65 45 46 46 49	50 35 48 23 52	44 48 52 48 56	35 36 49 37 38	54 57 39 57 49
54 52 40 42 63	45 29 37 66 44	56 63 58 52 60	42 48 34 54 51	57 59 39 45 33
41 44 55 43 46	52 66 31 59 44	36 37 42 39 38	70 39 44 41 41	70 64 49 48 62
68 59 60 60 33	47 45 53 56 59	57 55 66 61 40	50 62 43 47 49	52 55 55 60 46

2. ДОСЛІДЖЕННЯ КРИТЕРІЇВ ОЦІНКИ І РОЗРАХУНОК ВІДТВОРЮВАНОСТІ ВИРОБІВ ЕЛЕКТРОНІКИ.

Мета роботи: Дослідження впливу взаємного розміщення допусків з полями розсіювання похибок, їх вихідних параметрів на процент виходу придатних виробів.

2.1. Теоретичні відомості:

В сучасних výroбах електроніки отримати аналітичний вираз зв'язуючи вихідні параметри виробів з параметрами їх компонентів в більшості випадків не виходить. Відповідно, аналітичним шляхом не виходить отримати і рівняння похибок. Тому визначення чутливості вихідних параметрів виробів до флуктуації параметрів її компонентів зазвичай проводиться експериментальним шляхом на макетах методом малих приростів або іншим методом.[] В результаті отримують систему рівнянь похибки вигляду:

$$\frac{\Delta N}{N} = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\Delta g_i}{g_i}, \quad (2.1)$$

де N і g_i – номінальні значення вихідного параметру та параметру i -го компоненту виробу; ΔN і Δg_i – відхилення параметрів від номінальних значень; $A_i = \left[\frac{\partial N}{\partial g_i} \frac{g_i}{N} \right]$ – коефіцієнт впливу параметру g_i на вихідний параметр N .

Користуючись виразом (2.1) можна визначити поле розсіювання вихідних параметрів:

Систематичну похибку

$$M_N = \sum_{i=1}^n A_i M_i, \quad (2.2)$$

Випадкову похибку

$$\sigma_N = \gamma \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2 K_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} r_{ij} \cdot A_i K_i \sigma_i A_j K_j \sigma_j}, \quad (2.3)$$

Поле розсіювання

$$\delta = M_N \pm 3\sigma_N, \quad (2.4)$$

де M_N , M_i – середні значення полів розсіювання відносних похибок вихідних параметрів N виробів або електронних пристроїв та параметру i -го компоненту; $3\sigma_N$, $3\sigma_i$ – половина полів розсіювання відносних похибок вихідного параметру і параметрів i -го і j -го компонентів; K_i і K_j – коефіцієнти відносного розсіювання похибок i -го і j -го компонентів; r_{ij} – коефіцієнт кореляції між параметрами i -го і j -го компонентів; γ – коефіцієнт гарантованої

надійності довірчої ймовірності з якою проводиться розрахунок; n – число параметрів компонентів, які впливають на вихідний параметр.

Закон розподілу похибок вихідного параметру виробу і його компонентів, і відповідно, значення M_N , M_i , σ_N , σ_i , r_{ij} визначаються за даними експерименту як це робилося в лабораторній роботі №1. Для зручності розрахунків позначимо $\delta_N = 3\sigma_N$ і $\delta_i = 3\sigma_i$.

Якщо закон розподілу похибок вихідного параметру і параметрів i -го і j -го компонентів нормальний з полем розсіювання $2\delta = 6\sigma$, то вважаємо $M_N = M_i = 0$ і $K_i = 1$. В той же час при виготовленні ВГІС між параметрами одночасно оброблюваних плівкових елементів існує тісний позитивний кореляційний зв'язок. І тому парціальна похибка j -го комплексу визначається за формулою

$$\delta_{NIj} = \gamma \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2 \delta_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} r_{ij} \cdot A_i \delta_i A_j \delta_j} \quad (2.5)$$

Сумарне поле розсіювання похибок ВГІС, викликане похибками m незалежних комплексів плівкових елементів.

$$\delta_{NI\Sigma} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \delta_{NIj}^2} \quad (2.6)$$

Тоді сумарна випадкова складова поля розсіювання вихідного параметра ВГІС

$$\delta_{N\Sigma} = \sqrt{\delta_{NI}^2 + \delta_{NI\Sigma}^2}, \quad (2.7)$$

а сумарне поле розсіювання вихідного параметра ВГІС $\omega_\Sigma = 6\sigma$

$$\omega_\Sigma = M_N \pm \delta_N. \quad (2.8)$$

Якщо результуюче розподілення похибки вихідного параметру підлягають нормальному закону розподілу з полем 6σ (рис. 2.1).

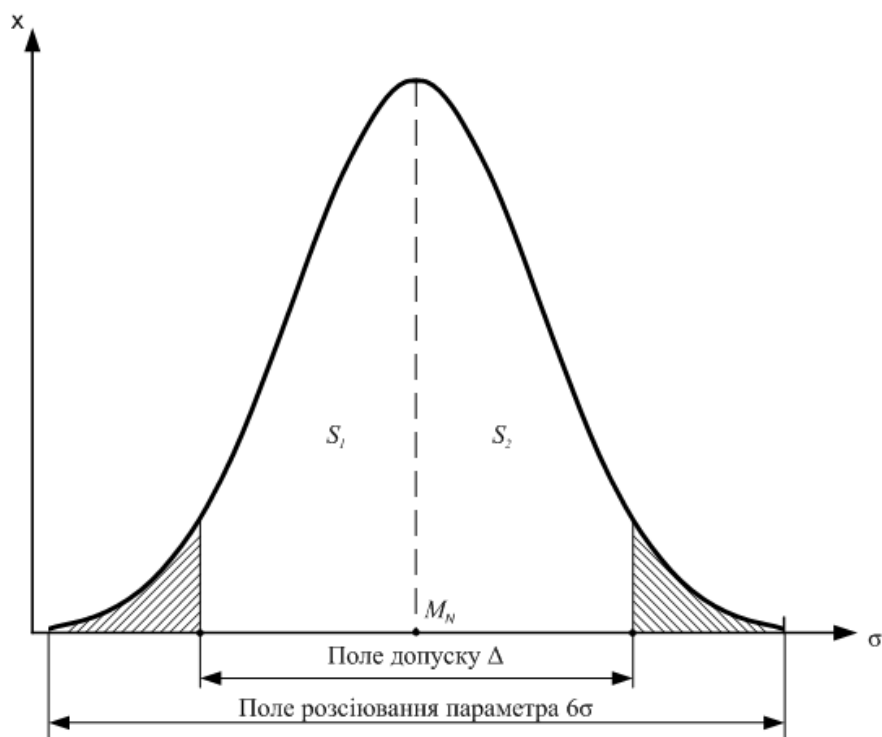


Рис.2.1. Нормальний закон розподілу з полем 6σ .

Знаючи взаємне розміщення поля допуску вихідного параметру та поля розсіювання похибок, можна визначити з якою ймовірністю забезпечується необхідна функціональна точність по даному параметру.

Площа під кривою нормального розподілу рис. 2.2 рівна 1 або 100%. На практиці криву використовують в інтервалі не більшому ніж $m \pm 3.29\sigma$. Площа, обмежена кривою нормального розподілу в вибраному інтервалі по осі абсцис, для даного випадку $S=99.9\%$. Цю площу називають довірчою ймовірністю, позначають через P і вона часто асоціюється з придатною продукцією або продукцією що відповідає допуску на вихідний (вихідні) параметр.

Площа за межами цього інтервалу називається ризиком $\alpha = 1 - p$, або помилкою першого роду. Для площі $S=99.9\%$ $\alpha = \pm 0.05\%$ - при двосторонньому допуску. В планах контролю використовують терміни: α – називають ризиком постачальника, а β – ризиком споживача. Під статистичним допуском розуміють інтервал $m \pm 3\sigma$ для якого $S=99.73\%$. За межами цього інтервалу знаходиться площа рівна 0.27%. Це означає, що завжди в вибірці з 10000 виробів буде знаходитися близько 27 бракованих.

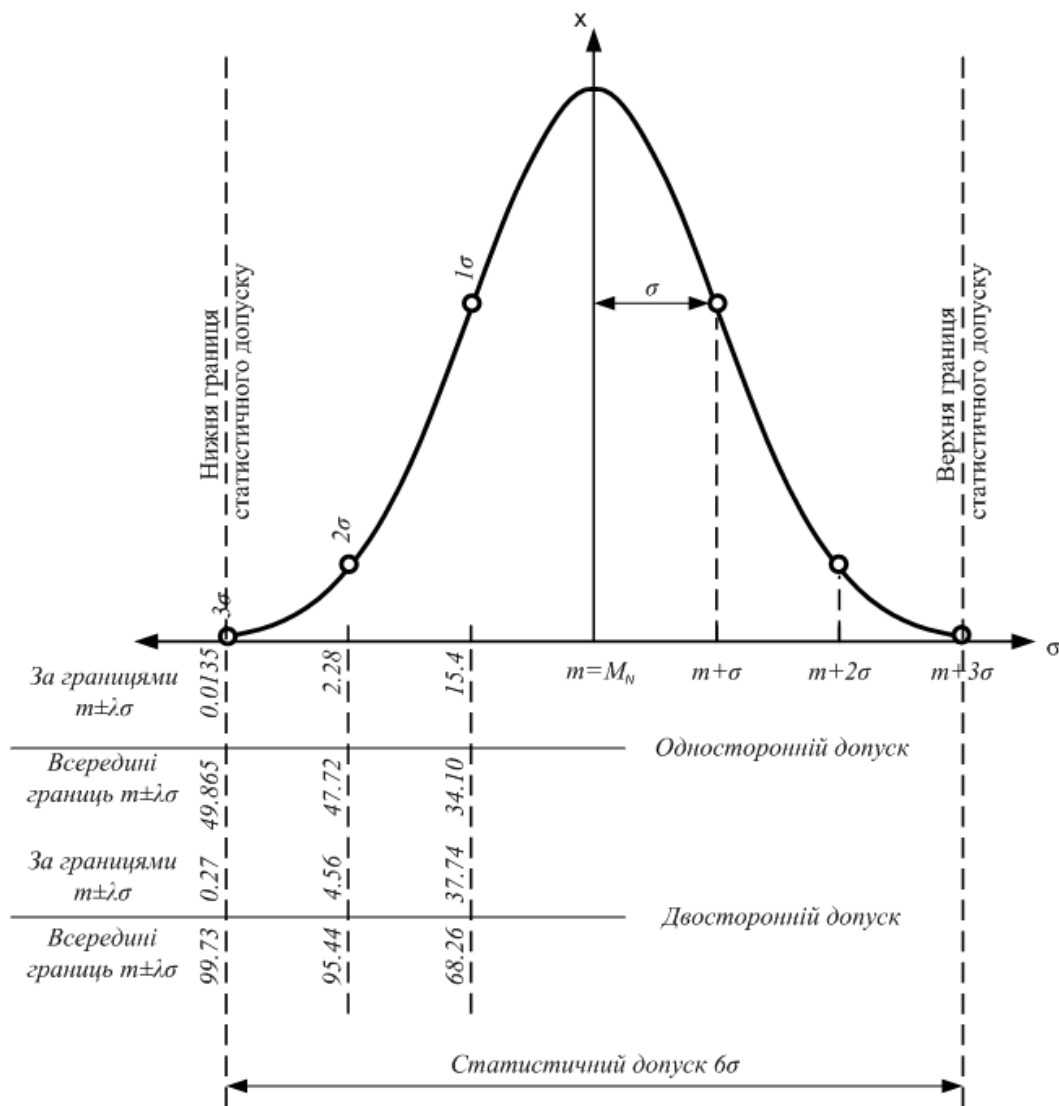


Рис. 2.2 Довірча ймовірність та ризик.

Таким чином ймовірність, забезпечення заданої точності відповідає ймовірності влучання випадкової величини $\frac{\Delta N}{N}$ в межах заданого допуску рис. 2.1(а, в). Для нормального закону вона знаходиться за формулою

$$P = P\left\{a \leq \frac{\Delta N}{N} \leq b\right\} = \Phi\left(\lambda_1 = \frac{b - M_N}{\sigma}\right) + \Phi\left(\lambda_2 = \frac{a - M_N}{\sigma}\right), \quad (2.9)$$

де $\Phi(\lambda)$ – нормоване значення функції Лапласа.

Причому $\Phi(\lambda_1)$ – відповідає площі S_1 під кривою нормального розподілу і точками a і M_N , а $\Phi(\lambda_2)$ відповідає площі S_2 . Точки a і b знаходяться з різних сторін відносно середнього значення, тому для одержання шуканої площі обидва значення $\Phi(\lambda_1)$ і $\Phi(\lambda_2)$ додаються. На практиці ця площа відповідає процентному вмісту придатної продукції, тобто продукції, вихідні параметри якої не виходять за межі допуску.

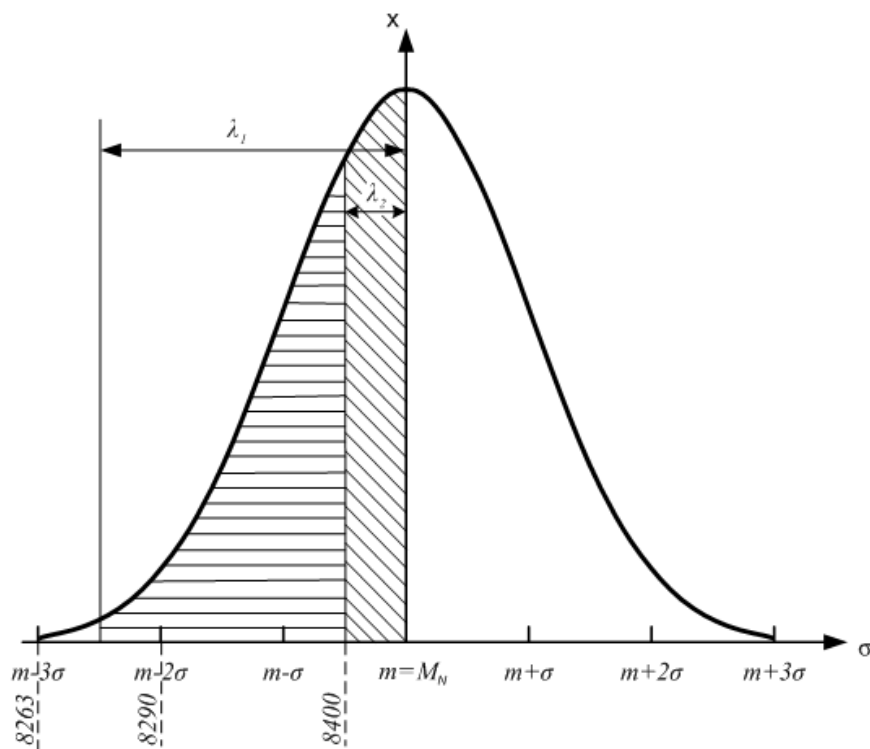


Рис. 2.3. Визначення площі між ординатами x_1 і x_2

Якщо обидві ординати лежать з однієї сторони від середнього значення, то для визначення площі між цими ординатами (рис. 2.3), необхідно знайти різницю значень Φ . Так якщо $x_1 = 8290$ і $x_2 = 8400$, $m = M_N = 8433$, $\sigma = 56.5$, то площа між x_1 і x_2 визначається наступним чином. Знаходимо

$$\lambda_1 = \frac{x_1 - m}{\sigma} = \frac{8290 - 8433}{56.5} = -2.53$$

$$\lambda_2 = \frac{x_2 - m}{\sigma} = \frac{8400 - 8433}{56.5} = -0.584$$

З таблиці додатку(II) знаходимо $\Phi(\lambda_1) = 0.4943$ і $\Phi(\lambda_2) = 0.2204$. Знаходимо різницю між значеннями $\Phi = 0.4943 - 0.2204 = 0.2732$. Отже між ординатами $x_1 = 8290$ і $x_2 = 8400$ лежить 27.39% всієї площі.

2.2. Приклади виконання лабораторної роботи.

Приклад 1. Оцінити з довірчою ймовірністю $P = 0.9973$ ($\gamma = 1$) відтворюваність опору двох послідовно з'єднаних резисторів рис. 2.4а та резисторного дільника напруги, побудованого на них (рис. 2.4б) в дискретному виконанні та виконанні на тонких плівках. Нехай $R_1 = R_2 = ?$ кОм $\pm \delta_R \%$ при допуску на загальний опір $\Delta R = \pm 7.5\%$. Закон розподілу опорів нормальний з полем розсіювання $6S$ і $K_{R_1} = K_{R_2} = 1$.

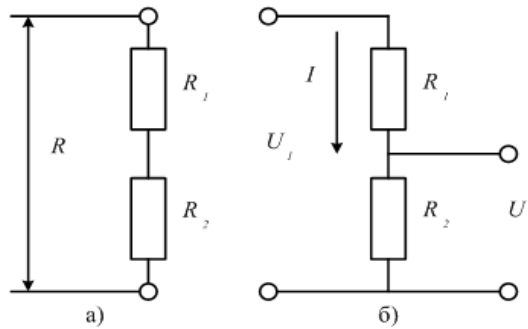


Рис. 2.4. Два послідовно включених резистора (а) і резисторний дільник напруги, побудований на них (б).

Розв'язання.

По вибірці з 50 однотипних опорів знайти поле розсіювання $\omega = \bar{R} \pm \delta_R$, де $\delta_R = 3S$, а S – оцінка середньоквадратичного значення відхилення значень опорів від R . За формулою 2.1 знаходимо рівняння похибки. Для випадку а

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\Delta R_2}{R_2}.$$

Так як $R_1 = R_2$, то

$$\frac{\Delta R}{R} = 0.5 \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1} + 0.5 \cdot \frac{\Delta R_2}{R_2} \quad (2.10)$$

Рівняння 2.10 дозволяє розрахувати поле розсіювання похибок загального опору на дискретних резисторах. При цьому необхідно враховувати, що допуски на опори резисторів симетричні ($M_{R_1} = M_{R_2} = 0$), тому середина поля допуску загального опору (2.2) $M_R = 0$. Кореляційний зв'язок між дискретними опорами $r_{R_1 R_2} = 0$. За формулами (2.3), (2.10) визначаємо δ_R і порівнюємо його з допуском на загальний опір $\Delta R = \pm 7.5\%$. Зробити висновки.

Якщо резистори R_1 і R_2 виготовляються по технології тонких плівок, то будемо вважати, що $r_{R_1 R_2} \approx 1$. Тому для розрахунку δ_R використовують формули (2.3) і (2.10).

За формулою 2.9 визначити процент виходу придатних ланок послідовно включених резисторів. Зробити висновки.

Приклад 2. Необхідно оцінити відтворюваність резисторного дільника напруги (рис. 2.4б), виконаного на резисторах з попереднього прикладу. Допуск на похибку ділення $\Delta_{U_2} = \pm 5\%$. Похибка напруги U_1 $\Delta_{U_1} = 0$.

Розв'язання.

Визначимо напругу, яка знімається з плеча R_2 дільника

$$U_1 = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2); I = \frac{U_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = IR_2 = \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Взявши повний диференціал цього виразу і розрахувавши коефіцієнти впливу, так як і в попередній задачі, отримаємо рівняння похибки даного дільника.

$$\frac{\Delta U_2}{U_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{\Delta R_1}{R_1} \right) \quad (2.11)$$

Розрахунок по ньому поля розсіювання похибок напруги дільників на дискретних резисторах виконується за формулою 2.3, а при використанні резисторів виготовлених за технологією тонких плівок – за формулами (2.5) та (2.13).

Ймовірність забезпечення заданої точності визначається за формулою (2.9).

2.3. Виконання роботи

1. Вихідними є дані, задані в лабораторній роботі №1. Середнє значення опору знайдене за вибіркою \bar{R} і його середнє квадратичне відхилення.
2. Оцінити з довірчою ймовірністю $P_1 = 0.9973$ і $P_2 = 0.95$ якщо $\gamma = 1$ відтворюваність опору двох послідовно з'єднаних резисторів (рис. 2.4а) в дискретному виконанні та виконанні на тонких плівках з $R_1 = R_2 = \bar{R}$, знайдених експериментально, $R_1 = R_2 = \bar{R} \pm 3S\%$, при допуску на загальний опір $\Delta_R = \pm 8\%$, $K_{R_1} = K_{R_2} = 1$.
3. Оцінити відтворюваність резисторного дільника напруги (рис. 2.4б), виконаного на тих же самих резисторах, якщо допуск на похибку ділення $\Delta_{U_2} = \pm 5\%$

2.4. Зміст звіту

Алгоритм розрахунків; програмне забезпечення; результати розрахунків; аналіз отриманих даних; висновки по роботі.

2.5. Контрольні запитання:

1. Що називається допуском?
2. Які види допусків Ви знаєте?
3. Як проводиться відбраковка виробів по нижній та верхній межі, якщо:
 - a. межі допуску симетричні відносно номінального значення?
 - b. не симетричні?
 - c. лежать з однієї сторони відносно номінального значення?
4. Який вид має рівняння похибки вихідного параметру?
5. Що розуміють під коефіцієнтом впливу похибки параметру α_i на вихідний параметр N ?
6. Як визначається поле розсіювання вихідних параметрів виробів електроніки?
7. Чим пояснити різницю в відтворюваності однакових елементів, виготовлених в дискретному виконанні та груповому виконанні за тонкоплівковою технологією?
8. Пояснити роль функції Лапласа при оцінці відтворюваності виробів електроніки?
9. Як впливають на відтворюваність вихідних параметрів виробів електроніки кореляційні зв'язки? В чому полягає причина їх появи?

3. ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ КОНТРОЛЮ ТА УПРАВЛІННЯ БІОТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ

Мета роботи: ознайомитись з можливістю високоякісного управління процесами в біомедичній електроніці за допомогою контрольних карт.

3.1. Теоретичні відомості:

Контрольна карта є статистичним інструментом, за допомогою якого можна проводити в житті принцип високоякісного виконання роботи з першого разу. Вона являє собою віддрукований на папері формуляр із сіткою з вертикальних і горизонтальних ліній, в яку в певній послідовності заносяться в вигляді точок виміряні значення ознаки якості, отриманні в ході технологічного процесу. Якщо виріб задовольняє потрібній якості, то послідовність точок не виходить за певні межі, нанесені на карту.

Розглянемо основні положення цього методу.

Якщо випадкова величина якості продукції підпадає під нормальний закон розподілу, то 99.73% значень, які досліджуються, знаходяться в межах трьох сигмових границь (в даному випадку в межах $\pm 3\sigma$). Звідси випливає, якщо відносно номінального значення вихідного параметру відкласти (вгору та вниз) 3σ , то до цієї області, при виробництві, повинні належати майже всі вимірювання вихідного параметру. Параметри виробів поза межами цієї зони свідчать про порушення технологічного процесу. На Рис. 3.1 показана контрольна карта для індивідуальних значень. По осі x відкладають номери виробів або інтервали часу, через які проводять контроль виробів, а по осі y значення параметру, що вимірюється. Для наочного подання динаміки процесу, точки, які відповідають виміряним значенням параметру, з'єднують відрізками прямої. На ці карти наносяться межі, які відповідають вимогам технологічних умов (ТУ):

$$T_{вту} = T_{ном} + 3\sigma - \text{верхня межа регулювання, яка відповідає вимогам ТУ};$$

$$T_{нту} = T_{ном} - 3\sigma - \text{нижня межа регулювання, яка відповідає вимогам ТУ}.$$

Тут $T_{ном}$ – номінальне значення вихідного параметру за ТУ або математичне очікування, а σ – середнє квадратичне відхилення, яке відповідає ТУ.

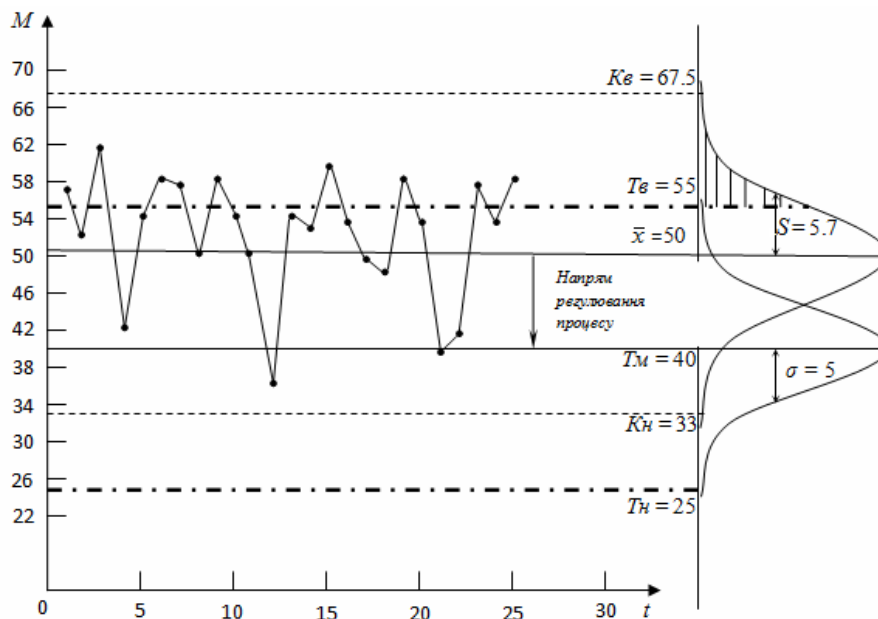


Рис. 3.1 – Контрольна карта індивідуальних значень. T_c, T_n – межі статистичного допуску на параметри виробу

За результатами експерименту будуються межі K_c та K_n : $K_{c,n} = \bar{x} \pm 3S$. Взаємне розміщення меж T_c, T_n і отриманих за даними експерименту K_c та K_n , дозволяють відповісти на питання про точність, витривалість та стабільність технологічного процесу. Значення \bar{x} та S визначають за даними експерименту. Так вихід вимірних значень за межі регулювання T_c, T_n свідчить про нестабільність технологічного процесу. Межі K_c та K_n , знайдені за даними експерименту – межі поля розсіювання параметрів виробів.

Задачею регулювання технологічних процесів за допомогою контрольних карт полягає в тому, щоб \bar{x} - знайдене по експериментальних даних співпадало з T_n або математичним очікуванням (вимога ТУ або замовника) і щоб поле розсіювання похибок вихідних параметрів виробів знаходилося всередині поля допуску (меж T_c, T_n).

Замість індивідуальних значень для цієї мети використовують середні значення вихідного параметру. Так як оцінка дисперсії середніх значень $S_{\bar{x}}^2$ в n разів менша, ніж оцінка дисперсії індивідуальних значень

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{S^2}{n}.$$

То межі регулювання для цього випадку будуть мати наступний вигляд

$$\begin{aligned} T_c &= T_{ном} + \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma \\ T_n &= T_{ном} - \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma \end{aligned} \quad (3.1)$$

А статистичні межі полів розсіювання вихідних параметрів електронних виробів

$$\begin{aligned} K_{\sigma} &= \bar{x} + 3 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \\ K_{\mu} &= \bar{x} - 3 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

де \bar{x} і S визначаються за даними експерименту, а T_H і σ – вимогами ТУ або замовника.

Нехай на вимогу замовника вихідні параметри виробу повинні знаходитись в межах $T_{\sigma, H} = T_{ном} \pm 3\sigma$, де $T_{ном}$ – номінальне значення вихідного параметру або середина поля допуску дорівнює 40 умовних одиниць; σ – середнє квадратичне відхилення, яке дорівнює 5. Таким чином, $T_{\sigma, H} = 40 \pm 15$. Вимірювання параметрів, 25 виготовлених виробів, дали результати (індивідуальні значення): 56, 51, 60, 42, 53, 58, 53, 50, 55, 52, 50, 36, 53, 52, 59, 49, 47, 56, 52, 42, 43, 51, 47, 51, 47, 42, 49. Необхідно визначити, чи задовольняють вихідні параметри цих виробів встановленому технологічному допуску?

Для цього обчислимо середнє квадратичне відхилення, що є основною технологічною нормою при виготовленні виробів:

$$\bar{x} = \frac{1}{25} (56 + 51 + \dots + 42 + 49) = 50.4;$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{24} ((56 - 50.4)^2 + \dots + (49 - 50.4)^2)} = 5.7.$$

Підставляючи отриманні значення в (3.2) отримаємо:

$$K_{\sigma, H} = \bar{x} \pm 3S = 50.4 \pm 17.1,$$

де K_{σ} , K_H , T_{σ} , T_H , \bar{x} , $T_{ном}$ наносять на контрольну карту (Рис. 3.1). Аналіз наявності інформації про відповідність вихідних параметрів виробів технічним нормам (крива 1, крива 2), показують, що деяка кількість виробів не відповідає технічним вимогам, через вихідні параметри, що перевищують верхню допустиму границю T_{σ} . Кількість відбракованих виробів (заштрихована область) визначають, як різницю половини площі під кривою нормального розподілу (вона завжди становить 0.5) та площі під цією ж кривою від T_{σ} до \bar{x} . Для цього випадку $\lambda = \frac{T_{\sigma} - \bar{x}}{S} = \frac{55 - 50.4}{5.7} \approx 0.7$. А $\Phi(0.7) = 0.242$, а частка браку $0.5 - 0.242 = 0.258$ або 25.8%.

3.2. Виконання роботи:

1. Отримати вихідні дані в вигляді чисельного ряду, з лабораторної роботи №1.
2. Отримати вимоги до процесу: математичне очікування, дисперсію та припустимий відсоток браку.

3. Побудувати схему контрольної карти, побудувати на ній теоретичний закон розподілу та межі області відповідній виходу бракованих виробів.
4. Нанести на карту результати вимірювання, визначити середнє значення та дисперсію.
5. Побудувати експериментальний закон розподілу.
6. Визначити експериментальне значення відсотку браку.
7. Зробити висновок про хід процесу.
8. Підтвердити результати за допомогою комп'ютерного обчислення.

3.3. Обробка результатів дослідження

Результати досліджень повинні бути оформлені у вигляді протоколу, в якому необхідно вказати:

1. Дату досліджень.
2. Розрахункові формули та співвідношення.
3. Контрольну карту, аналіз результатів досліджень та значення по результатам аналізу.
4. Висновки, підпис виконавця та керівника.
5. Результати досліджень зводяться в таблиці, графіки, гістограми і т. ін.

3.4. Контрольні запитання

1. Що являє собою контрольна карта?
2. Поясніть регулювання біотехнологічного процесу методом медіан, методом середніх значень та поясніть різницю між ними.
3. Як визначаються межі регулювання методом медіан, середніх значень?
4. Як визначаються межі регулювання для вибірки з нормального розподілу?
5. Як визначається середнє значення та розмах вибірки?
6. Що розуміють під показником зміщення центру розсіювання?

4. ПОБУДУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК)

Мета роботи: ознайомитися з методикою моделювання біооб'єктів та біотехнологічних процесів з допомогою кореляційно-регресійного аналізу, з обчисленням коефіцієнтів кореляції між двома параметрами.

4.1. Теоретичні відомості

Для апроксимації експериментальних залежностей та збудування їх математичних моделей необхідно, щоб існувала визначна ступінь взаємозв'язку між параметрами x_i (значення незалежної змінної) та y_i (значення спостережень експерименту), де $i = \overline{1, n}$ – кількість спостережень експерименту. Для оцінки ступеню взаємозв'язку параметрів x_i і y_i обчислюють коефіцієнт їх взаємної кореляції R_{xy} , який визначає величину зв'язку між параметрами x_i і y_i . Якщо R_{xy} близько до одиниці, говорять про тісний взаємозв'язок параметрів x_i і y_i , а якщо R_{xy} близько до нуля, говорять, що параметри x_i і y_i практично не залежать один від одного.

Значення R_{xy} обчислюють за наступною формулою:

$$R_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (4.1)$$

де \bar{x} , \bar{y} – середні арифметичні параметри x_i і y_i :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (4.2)$$

В залежності від значення R_{xy} можна зробити наступні висновки:

$0 < |R_{xy}| < 0,2$ – зв'язку практично немає;

$0,2 \leq |R_{xy}| < 0,5$ – слабкий зв'язок;

$0,5 \leq |R_{xy}| < 0,75$ – середній зв'язок;

$0,75 \leq |R_{xy}| < 0,95$ – сильний зв'язок;

$0,95 \leq |R_{xy}| < 1$ – практично функціональний зв'язок.

Якщо $0 < |R_{xy}| < 0,5$, не рекомендується застосовувати чисельні методи апроксимації та будувати математичні моделі на основі експериментальних залежностей. При $0,5 \leq |R_{xy}| \leq 1$ ці методи можна застосовувати.

Регресія

Регресією називається зміна функції при певних змінах одного або декількох аргументів. Залежність функції від аргументу може бути або функціональною, або умовно прийнятою в дослідженні. Прикладом функціональної залежності може бути залежність ваги людини від віку.

Взаємовідношення між функцією й аргументом виражається формулою:

$$y = f(x),$$

де ознака y є функцією ознаки x .

Якщо зміна функції досліджується від одного аргументу, регресія називається простою:

$$y = f(x).$$

Якщо від двох і більш аргументів – множинною:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Якщо при будь-якому значенні аргументу однакові прирости його викликають однакові прирости функції, регресія називається *прямолінійною*. Якщо ця умова не виконується, то регресія називається *криволінійною*.

Для зображення регресії використовується ряд регресії (емпіричний або теоретичний), лінія регресії (емпірична або теоретична), рівняння регресії. Емпіричний ряд регресії – це подвійний ряд цифр, який включає значення аргументу і відповідні середні значення функції, отримані в досліді.

Найбільш загальним аналітичним способом моделювання рядів регресії слугує метод найменших квадратів (МНК). Цим способом отримують значення функцій, квадрати відхилень яких від емпіричних значень дають найменшу суму.

Проста лінійна регресія

Ми хочемо встановити зв'язок між однією незалежною змінною x та залежною змінною y . Зазвичай вважається, що незалежна змінна x неперервна та може контролюватись експериментатором. Тоді, якщо існує план експерименту, ми обираємо певні значення x та спостерігаємо певні значення y .

Нехай, істинний зв'язок між y та x лінійний. Тоді \hat{y} для кожного значення x має вигляд:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x, \quad (4.3)$$

де \hat{y} - залежна змінна, що визначається з моделі.

Для побудови моделі застосуємо метод найменших квадратів (МНК). Цей метод допомагає визначити коефіцієнти поліному та побудувати функціональну залежність $y_i = f(x_i)$, за досліджуваними точками. При цьому мінімізується квадратичне відхилення:

$$\min K_{\text{відхил}} = \min \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_m(x)]^2, \quad (4.4)$$

де y_i – експериментальне значення, $\hat{y}_m(x)$ – значення виходу в тій же точці, обчислене з моделі.

Задача полягає в оцінці невідомих компонентів вектора $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ поліному $\hat{y}_m(x)$, таким чином, щоб різниця квадратів $[y_i - \hat{y}_m(x)]^2$ у будь-який проміжок часу була мінімальною. Значення компонентів вектора \bar{a} визначається з умови мінімуму виразу (4.4):

$$\frac{\partial K_{\text{відхил}}}{\partial a_k} = 0; \quad K = \overline{0, m} \quad (4.5)$$

Припустимо, для експериментальних даних Таблиці 4.1 необхідно побудувати лінію регресії.

Таблиця 4.1

x	y	\hat{y}
1	10	11.6
3	20	16.4
4	18	18.8
5	20	21.2

Вибираємо лінійну модель $\hat{y}_1 = b_0 + b_1 x_1$ мінімізуючи вираз $\sum_{i=1}^4 (y_i - \hat{y})^2$ та визначаємо коефіцієнти b_0, b_1 .

В даному випадку вираз (4.4) можна подати в такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^4 (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = (y_1 - b_0 - b_1 x_1)^2 + (y_2 - b_0 - b_1 x_2)^2 + (y_3 - b_0 - b_1 x_3)^2 + (y_4 - b_0 - b_1 x_4)^2.$$

Мінімізуємо даний вираз в оптимальній точці: $\frac{\partial y}{\partial b_0} = 0, \frac{\partial y}{\partial b_1} = 0$, отримаємо:

$$\begin{cases} -2(y_1 - b_0 - b_1 x_1) - 2(y_2 - b_0 - b_1 x_2) - 2(y_3 - b_0 - b_1 x_3) - 2(y_4 - b_0 - b_1 x_4) = 0 \\ -2x_1(y_1 - b_0 - b_1 x_1) - 2x_2(y_2 - b_0 - b_1 x_2) - 2x_3(y_3 - b_0 - b_1 x_3) - 2x_4(y_4 - b_0 - b_1 x_4) = 0 \end{cases}$$

Ці два рівняння можна подати системою:

$$\begin{cases} 4b_0 + b_1 \sum_{i=1}^4 x_i = \sum_{i=1}^4 y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^4 x_i + b_1 \sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=1}^4 x_i y_i \end{cases} \quad (4.6)$$

Якщо кількість точок n , то дана система набуде вигляду:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (4.7)$$

Отримані рівняння (4.6) та (4.7) називають *нормальними МНК-рівняннями*. Їх розв'язок має вигляд:

$$b_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i - b_1 \bar{x}; b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (4.8)$$

Визначаємо чисельник і знаменник виразу (4.8) для визначення коефіцієнту b_1 через S_{xy} та S_{xx} :

$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad (4.9)$$

де:

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right), \quad (4.10)$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2, \quad (4.11)$$

де S_{xx} скоректована сума квадратів x ; а S_{xy} – скоректована сума змішаних добутоків x та y .

Повернемось до нашого прикладу для проведення проміжних обчислень:

$$\sum x_i = 1 + 3 + 4 + 5 = 13; \quad \sum x_i^2 = 1 + 9 + 16 + 25 = 51; \quad \sum y_i = 10 + 20 + 18 + 20 = 68;$$

$$\sum x_i y_i = 10 + 60 + 72 + 100 = 242.$$

Тоді нормальне МНК-рівняння матиме вигляд:

$$\begin{cases} 4b_0 + 13b_1 = 68 \\ 13b_0 + 51b_1 = 242 \end{cases}$$

Обчислюючи цю систему, отримаємо:

$$b_1 = \frac{\left\{ 242 - 4 \cdot \left(\frac{13}{4} \right) \cdot \left(\frac{68}{4} \right) \right\}}{\left\{ 51 - 4 \cdot \left(\frac{13}{4} \right)^2 \right\}} = 2.4, \quad b_0 = \frac{68}{4} - 2.4 \cdot \left(\frac{13}{4} \right) = 9.2.$$

Рівняння регресії має вигляд: $\hat{y} = 9.2 + 2.4x$.

На Рис. 4.1 зображені експериментальні точки та відповідні точки, які отримані за моделлю.

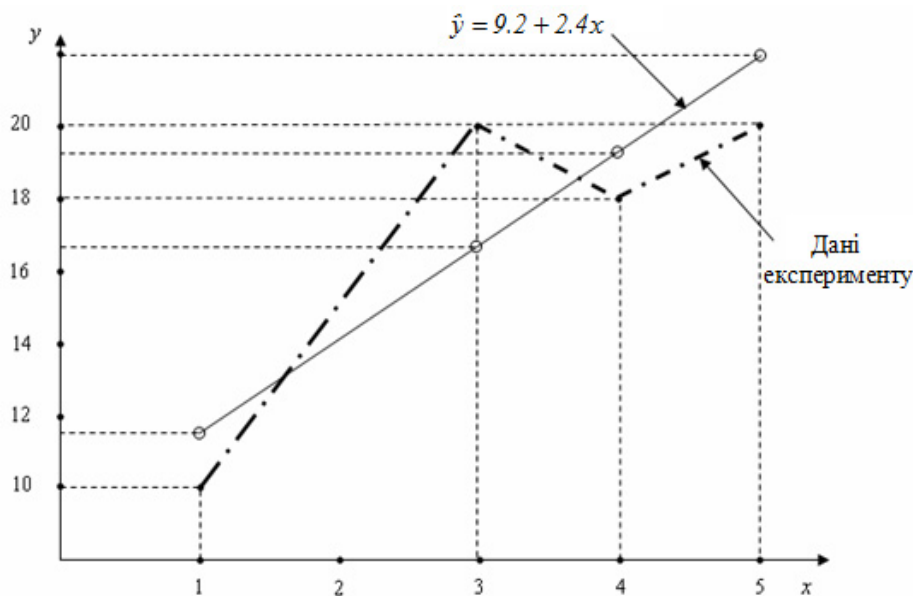


Рис. 4.1 Експериментальні точки та відповідні значення, які отримані за моделлю

Різниця між спостереженнями y_i і передбаченими (з рівняння регресії) значеннями \hat{y}_i називається залишком (похибкою) і позначається: $\varepsilon = y_i - \hat{y}_i$.

Сума квадратів похибок має наступний вигляд:

$$SS_{\text{пох}} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad (4.12)$$

При обчисленнях зазвичай використовуються вирази в правих частинах співвідношень (4.10) та (4.11). В нових позначеннях МНК-оцінка кутового коефіцієнта прямої має вигляд:

$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}. \quad (4.13)$$

Один із засобів перевірки коректності побудови моделі за даними експерименту полягає в наступному:

для МНК здійснюється розкладання на два компонента виразу S_{yy} :

$$S_{yy} = \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2. \quad (4.14)$$

Тоді співвідношення (4.14) можна подати в вигляді:

$$S_{yy} = SS_{рег} + SS_{пом} \quad (4.15)$$

Розрахункова формула для $SS_{рег}$ (сума квадратів, обумовлена регресією) знаходиться зі співвідношення:

$$SS_{рег} = b_1 S_{xy}. \quad (4.16)$$

Число ступенів свободи S_{yy} складає $n-1$, а $SS_{рег}$ та $SS_{пом}$ дорівнює 1 та $n-2$, відповідно.

Можна показати, що $M\left[\frac{SS_{пом}}{n-2}\right] = \sigma^2$ і $M\left[\frac{SS_{рег}}{1}\right] = \beta_1^2 S_{xx}$, та $SS_{пом}$ і $SS_{рег}$ незалежні.

Таким чином, якщо справедлива гіпотеза $H_0 : \beta_1 = 0$, то статистика:

$$F_0 = \frac{\frac{SS_{рег}}{1}}{\frac{SS_{пом}}{(n-2)}} = \frac{MS_{рег}}{MS_{пом}}, \quad (4.17)$$

підкорюється F -розподілу з 1 та $n-2$ степенями свободи; ми відхилимо H_0 , якщо $F_0 > F_{\alpha; 1; n-2}$.

Процедура перевірки звичайно оформлюється в вигляді таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Джерело мінливості	Сума квадратів	Степінь свободи	Середній квадрат	F_0
Регресія	$SS_{рег} = \hat{\beta}_1 S_{xy}$	2	$MSS_{рег}$	$\frac{MSS_{рег}}{MSS_{пом}}$
Помилка або залишок	$SS_{пом} = S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy}$	$n-2$	$MSS_{пом}$	
Сума	S_{yy}	$n-1$		

4.2. Виконання роботи

За даними лабораторної роботи №1 вибрати п'ять вибірок в кожній по п'ять вимірювань. Для кожної з них знайти розмах R і середнє квадратичне відхилення S . Побудувати залежність S від R та описати її з допомогою МНК.

1. Отримати вихідні дані у вигляді ряду двокоординатних точок або чисельного ряду. В останньому випадку вважати отриманий ряд за ординати точок, а абсцисами вважати індекси натурального ряду починаючи з одиниці.
2. Знайти коефіцієнт кореляції, між розмахом R і середнім квадратичним відхиленням S .
3. Побудувати залежність $R = f(S)$ з допомогою МНК.
4. Навести алгоритм обчислення меж розрахунків.

4.3. Зміст звіту

1. Систему рівнянь методу найменших квадратів.
2. Графік залежності R від S за даними експерименту та отриманої з допомогою МНК.
3. Оцінити достовірність отриманої моделі з допомогою дисперсійного та кореляційного аналізу.

4.4. Контрольні запитання

1. Як визначається загальний вигляд апроксимуючої функції?
2. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?
3. Які властивості мають значення параметрів апроксимуючої функції, знайдені методом найменших квадратів?
4. Як створюється система рівнянь для означення параметрів МНК?
5. Як виконується перевірка гіпотез при використанні простої лінійної регресії?
6. Що ви розумієте під регресією?
7. Що таке проста та множинна регресія?

5. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В БІОМЕДИЧНІЙ ЕЛЕКТРОНІЦІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОВНОГО ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ(ПФЕ)

Мета роботи: ознайомитись та засвоїти методику отримання моделей в біомедичній електроніці за допомогою повного факторного експерименту (ПФЕ).

5.1. Теоретичні відомості

Таблиця 5.1

Терміни, які використовуються в методиці, та їх визначення

Термін	Визначення
1	2
Основні поняття	
1.	Технологічний процес (ТП) За ГОСТ 3.1109-73 – частина виробничого процесу, яка містить дії по зміні та наступному визначенню стану предмета виробництва
2.	Технологічна операція За ГОСТ 3.1109-73 – завершена частина технологічного процесу, виконана на одному робочому місці
3.	Технологічний режим Умови виконання певної частини ТП, які характеризуються значеннями експлуатаційних параметрів застосованих засобів технологічного оснащення
4.	Експеримент Система операцій і, у випадку необхідності, впливів, що виконуються для отримання інформації про об'єкт на основі результатів спостережень
5.	План експерименту Правила виконання експерименту, які встановлюють об'єм, умови та порядок реалізації дослідів
6.	Математична Модель Система співвідношень між параметром оптимізації і факторами, а також обмеженнями, які накладаються на них
7.	Параметр оптимізації Показник якості ТП, для визначення найкращого значення вихідного параметра, заради якого проводиться експеримент
8.	Фактор Контролююча змінна, яка впливає на параметр оптимізації
9.	Рівень фактору Фіксоване значення фактору, яке відповідає межі поля допуску
10.	Основний рівень фактору Значення фактору, яке відповідає середині поля допуску та нулю в без вимірному просторі

11.	Верхній рівень фактору	Допустиме максимальне відхилення фактора від основного рівня (+ 1 за безвимірною шкалою)
12.	Нижній рівень фактору	Допустиме максимальне відхилення фактора від основного рівня (- 1 за безвимірною шкалою)
13.	Інтервал варіювання фактору	Гранично допустимі значення відхилення фактора від основного рівня, які відповідають ± 1 за безвимірною шкалою
14.	Рандомізація	Випадковий порядок проведення дослідів
15.	Паралельні досліди	Рандомізовані в часі досліди, в яких рівні всіх факторів однакові
16.	Параметр моделі	Константа, яка входить в математичну модель

Для знаходження моделі ТП, зображеного в вигляді „чорного ящика” (рис.5.1), використовують експериментальні методи – методи планування експерименту.



Рис. 5.1 Схема багатомірного технологічного процесу

Планування експерименту – це процедура вибору числа й умови проведення дослідів, яка забезпечує побудову математичної моделі з мінімальним числом експериментів.

Планування експерименту ґрунтується на кібернетичному підході до організації та проведенню експериментальних дослідів складних систем.

При розгляді такої кібернетичної системи розрізняють входи – керовані фактори x_1, x_2, \dots, x_k , що відповідають впливу на систему, та виходи y_1, y_2, \dots, y_l (рис. 5.1.). Кожен фактор може приймати в досліді одне з декількох значень, які називаються рівнями факторів. Кожному фіксованому набору рівнів відповідає точка в багатовимірному просторі факторів – факторний простір.

Існує досить визначений зв’язок між рівнями фактора та відгуком системи:

$$y_1 = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (5.1)$$

де ψ_1 – функція відгуку, яка зв’язує параметр оптимізації зі змінними параметрами x_1, x_2, \dots, x_k , що варіюють при дослідженні.

Функцію відгуку можна з достатньою точністю представити в вигляді поліному:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_{ij} x_i + \sum_{ipj} b_{ij} x_i x_j + \dots, \quad (5.2)$$

де y – вибіркова оцінка ψ_1 ; b_0, b_1, b_2, \dots – вибіркові оцінки коефіцієнтів.

Для повного факторного експерименту кількість дослідів залежить від числа факторів K .

Якщо число факторів K , кожен з яких може встановлюватись на α рівнях, то для того, щоб здійснити повний факторний експеримент, необхідно поставити $N = \alpha^k$ дослідів.

Найбільше розповсюдження отримали експерименти, в яких фактори варіюються на двох рівнях, тобто типу 2^k .

Математично метод ПФЕ реалізується в наступному порядку:

- а) планування експерименту;
- б) проведення експерименту;
- в) перевірка відтворення;
- г) отримання математичної моделі об’єкту з перевіркою статистичної значності коефіцієнтів полінома;
- д) перевірка адекватності математичного опису.

Планування експерименту

Фактори повинні безпосередньо впливати на об’єкт, бути незалежними, вимірюваними, керованими. Сукупність факторів повинна бути сумісною. Кожен фактор має область свого визначення, після вибору якої необхідно знайти локальну область для проведення експерименту. Ця процедура включає в себе вибір рівнів варіювання факторів. В загальному випадку рівнів може бути будь-яке число, відстань між ними може бути однаковою або різною. Число рівнів визначається конкретною постановкою задачі та виглядом факторів. В загальному випадку фактори – розмірні величини.

Центр плану, або точку, в околі якої ставиться серія дослідів, вибирають на основі апріорних свідчень про процес; якщо ж вона відсутня, зазвичай в якості центра плану приймають центр досліджуваної області.

Для зручності обробки результатів дослідів, незалежні змінні x перетворюють на безрозмірні змінні

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i}, \quad (5.3)$$

де $\Delta X_i = \frac{X_{i\max} - X_{i\min}}{2}$ – інтервал варіювання за i -ю змінною; X_{i0} – i -й базовий рівень змінної.

На розміри інтервалів варіювання накладають певні обмеження. Інтервали варіювання по кожній змінній вибирають такими, щоб приріст вихідного параметра y до базового значення y_0 можна було виділити на фоні шуму при невеликому числі паралельних дослідів. Зазвичай ж інтервал варіювання вибирають в межах 0,05...0,3 діапазону варіювання за даною змінною. У безрозмірній системі координат відповідно до (5.3) верхній рівень фактора дорівнює «+1», а нижній – «-1».

Припустимо, що розглядаємо дві незалежні змінні x_1 та x_2 , при цьому значення кожної з них варіюємо на двох рівнях. Усі можливі комбінації вичерпаються, якщо будуть проведені чотири досліди (рис.5.2). В точці “ a ” обидва фактори знаходяться на верхньому рівні. В точці “ c ” два мінуса означають, що фактор знаходиться на нижньому рівні. В точці “ d ” – перший фактор знаходиться на нижньому рівні, а другий на верхньому і т.д. Так, наприклад, при проведенні операції оксидування номінальне значення температури оксидування (фактор x_1) рівне 1000 °С, а інтервал варіювання $\Delta x_1 = 10$ °С, а номінальне значення часу проведення операції (фактор x_2) становить 30 хв. То в точці $a(+,+)$ обидва фактори знаходяться на верхньому рівні, де температура виставляється 1000 °С + 10 °С = 1010 °С, а час 30 хв. + 1 хв. = 31 хв.

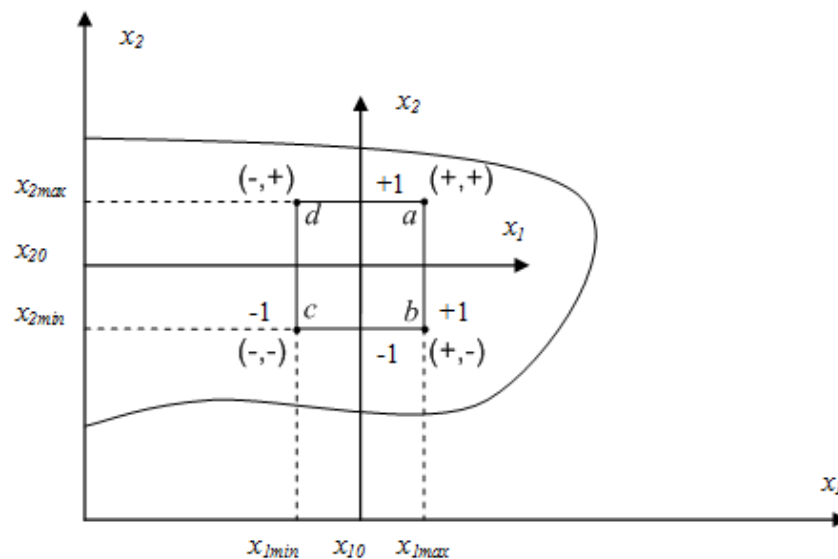


Рис. 5.2. Область визначення факторів та їх рівня

При побудові матриці планування можна користуватись наступним правилом:

- перший стовпчик з віртуальним значенням фактора x_0 має значення «+»;
- першу строку матриці планування обираємо так, щоб керовані змінні знаходились на верхньому (+1) рівні;
- частота зміни знака керованих змінних для кожної наступної змінної повинна бути вдвічі менша, ніж для попередньої.

Якщо число факторів рівне K , то число дослідів необхідне для проведення ПФЕ рівне $N=2^k$. В принципі число факторів може бути будь яким $i = \overline{1, k}$. Для перевірки відтворюваності дослідних даних обов'язково проводяться паралельні досліди $j = \overline{1, m}$. Число дослідів в кожній строці може змінюватися від 1 до m . Нумерацію кожної строки проводять з допомогою змінної $g = \overline{1, N}$, де $N=2^k$.

Розглянемо дві важливі якості планів:

- 1) плани симетричні відносно центра експерименту:

$$\sum_{g=1}^N x_{ig} = 0; i = \overline{1, k}, g = \overline{1, N},$$

тобто сума елементів будь-якого стовпця матриці планування дорівнює нулю;

- 2) плани нормовані:

$$\sum_{g=1}^N x_{gi}^2 = N; i = \overline{1, k}$$

тобто сума квадратів елементів будь-якого стовпця матриці планування дорівнює числу дослідів.

Розширена матриця ПФЕ типу 2^2 зображена в таблиці 5.2

Згідно графам 3 та 4 (власне планування) будується лінійна модель:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i. \quad (5.4)$$

Для двох факторів:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2. \quad (5.5)$$

Таблиця 5.2. Матриця ПФЕ типу 2^2 .

		$i = \overline{1, k}$			$l = \overline{1, m}$				
	Номер досліду	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	...	y_m	\bar{y}
$g = \overline{1, N}$	1	2	3	4	5	6	...	N	$N+1$
	1	+1	+1	+1	y_{11}	y_{21}	...	y_{m1}	$\bar{y}_1 = \frac{y_{11} + y_{21} + \dots + y_{m1}}{n}$
	2	+1	-1	+1	y_{12}	y_{22}	...	y_{m2}	$\bar{y}_2 = \frac{y_{12} + y_{22} + \dots + y_{m2}}{n}$
	3	+1	+1	-1	y_{13}	y_{23}	...	y_{m3}	$\bar{y}_3 = \frac{y_{13} + y_{23} + \dots + y_{m3}}{n}$
	4	+1	-1	-1	y_{14}	y_{24}	...	y_{m4}	$\bar{y}_4 = \frac{y_{14} + y_{24} + \dots + y_{m4}}{n}$

Досліди, задані планом експерименту проводять рандомізовано в часі, тобто в випадковій послідовності. При організації експерименту слід враховувати необхідність мати оцінку дисперсії S_g^2 . Вона може бути відома й до його початку, але зазвичай її оцінюють в процесі експерименту. Це можна зробити при дублюванні дослідів.

Коефіцієнти b_0, b_1, b_2 за даними експерименту розраховують наступним чином:

$$b_0 = \frac{(+1)y_1 + (+1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4}{4} = \bar{y};$$

$$b_1 = \frac{(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4}; \quad (5.6)$$

$$b_2 = \frac{(+1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (-1)y_4}{4},$$

тобто шляхом множення стовпця відповідного фактора на стовпець вихідного параметра \bar{y} .

Або в зальному вигляді:

$$b_i = \frac{\sum_{g=1}^N x_{gi} y_g}{N}.$$

Коефіцієнти при незалежних змінних вказують на силу впливу факторів на вихідний параметр, тобто чим більше числове значення коефіцієнта, тим більший вплив фактору на вихідний параметр. Якщо коефіцієнт має знак «+», то зі збільшенням значення фактора

параметр оптимізації зростає, а якщо «-», то цей параметр зменшується. Коефіцієнти b_i пропорційні внеску даного фактора в параметр оптимізації при переході фактора з нульового рівня на верхній або нижній.

Один із часто зустрічних видів нелінійності пов'язаний з тим, що ефект одного фактора залежить від рівня, на якому знаходиться інший фактор. В цьому випадку кажуть, що має місце ефект взаємодії двох факторів. ПФЕ дозволяє кількісно оцінювати ефекти взаємодії. Для цього треба, користуючись правилом множення стовпців факторів, знайти взаємодію яку хочуть врахувати; отримати стовпець добутку двох факторів (наприклад, x_1 та x_2). Тобто, якщо при зміні фактору x_1 змінюється в незначній мірі і фактор x_2 , то для визначення впливу взаємодії $x_1 x_2$ на вихідний параметр перемножують стовпчики 3 та 4 і отримують стовпець взаємодії $x_1 x_2$. Для визначення сили впливу на вихідний параметр “ y ” за рахунок цієї взаємодії перемножують стовпчики “ $x_1 x_2$ ” та “ y ”.

Таблиця 5.3

Номер досліджу	x_0	x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	y
1	1	+1	+1	+1	y_1
2	1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	-1	+1	y_3
4	+1	-1	-1	-1	y_4

Ця методика дозволяє отримати модель в наступному вигляді:

$$\hat{y} = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2,$$

де
$$b_{12} = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (-1)y_4}{4}. \quad (5.7)$$

5.2. Проведення й оцінка результатів експерименту.

Після вибору плану експерименту переходять безпосередньо до експерименту (табл.5.2, 5.3).

В кожній точці плану реалізується декілька паралельних дослідів. При цьому, як правило не будуть отриманні повністю ідентичні результати. Розкид вихідного сигналу зумовлений наявністю похибки досліджу (похибки відтворення).

Дисперсію досліджу S_y^2 у випадку рівномірного дублювання кількості дослідів у кожній точці плану визначають за формулою:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{g=1}^N S_g^2}{N}, \quad (5.8)$$

де S_g^2 – построкова дисперсія:

$$S_g^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{l=1}^m (y_{gl} - \bar{y}_g)^2, \quad (5.9)$$

де m – число паралельних дослідів; $\bar{y}_g = \frac{\sum_{l=1}^m y_{gl}}{m}$ – середнє значення в кожній точці плану; в кожній строці; $N = 2^K$; K – число факторів.

Вимога однорідності дисперсій – одна з основних вимог регресійного аналізу.

Гіпотезу про однорідність дисперсій перевіряють за допомогою критерію Кохрена:

$$G_{розр} = \frac{S_{max}^2}{\sum_{g=1}^N S_g^2}, \quad (5.10)$$

де S_{max}^2 - максимальне значення дисперсії серед всіх значень, що визначені за строками.

Гіпотезу про однорідність дисперсій не відкидається, якщо розрахункове значення критерію Кохрена не перевищує табличне $G_{розр} < G_{табл}$.

Значення $G_{табл}$ знаходять з таблиць в залежності від рівня значущості α (частіше за все $\alpha = 0,01 \dots 0,05$), числа степенів свободи $f_2 = m - 1$ і числа дослідів N . Наприклад, для $N = 8 = 2^3$, $f_2 = m - 1 = 4$, якщо $m=5$ отримаємо $G_{табл} = 0,391$ (див. додаток III).

Якщо перевірка показала, що експерименти відтворюванні, результати можна використовувати для оцінки коефіцієнтів регресії, так як це було показано вище, в іншому випадку рекомендується збільшити число паралельних дослідів.

5.3. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів

Після обчислення коефіцієнтів проводиться оцінка їх значущості. Вона полягає в зіставленні значень абсолютного значення коефіцієнту $|b_i|$ та дисперсії похибки визначення коефіцієнту $S^2(b_i)$. Оцінка значущості (перевірка нуль-гіпотези $b_i = 0$) проводиться з допомогою t – критерію Ст'юдента

$$t_i = \frac{|b_i|}{S(b_i)}.$$

При ортогональному плануванні дисперсія помилок кожного з коефіцієнтів

$$S^2(b_i) = \frac{S^2(y)}{N \cdot m},$$

де $S^2(y)$ знаходиться за формулою 5.8.

Коефіцієнт b_i визнається значущим, якщо t_i більше $t_{кр}$, знайдене з таблиці додатку IV за заданим рівнем значущості α і числу ступенів свободи $f = N(m-1)$.

Коефіцієнт b_i значущий, якщо

$$b_i > t_i \cdot S(b_i) \quad (5.15)$$

Незначущість коефіцієнтів b_i може бути викликана наступними причинами:

- 1) інтервал варіювання Δx_i i -ї змінної був вибраний занадто малим;
- 2) базовий рівень i -ї змінної був близьким до точки екстремуму;
- 3) велика помилка експерименту, викликана наявністю некерованих факторів;
- 4) даний фактор або взаємодія факторів не впливає на вихідний параметр.

5.4. Перевірка адекватності моделі

Наступний етап обробки даних – перевірка гіпотези про адекватність моделі, тобто пошук відповіді на питання, чи можна використовувати отримане рівняння для опису процесу, або необхідна більш складна модель?

Гіпотезу про адекватність найчастіше перевіряють за допомогою F -критерію (критерію Фішера).

Дисперсія неадекватності отриманої моделі реальному процесу визначається за формулою

$$S_{неад}^2 = \sum_{g=1}^N \frac{(\hat{y}_{g,розр} - \bar{y}_g)^2}{f_2}; \quad f_2 = N - K' \quad (5.16)$$

$$S_{неад}^2 = \sum_{g=1}^N \frac{(\hat{y}_g - \bar{y}_g)^2}{N - K'}$$

де K' – число залишених у моделі коефіцієнтів.

Гіпотезу про адекватність моделі приймають у тому випадку, якщо розрахункове значення F -критерію не перевищує табличне для заданого рівня значності α :

$$F_{розр} \leq F_{табл} \quad (5.17)$$

Так, для $\alpha = 0,05$; $f_1 = 30$; $f_2 = 5$; $F_{табл} = 2,53$ (див. додаток V).

Якщо при перевірці адекватності, або якщо $S_{неад}^2 > S^2(y)$, отриманий від'ємний результат, тобто модель недостатньо вірно описує процес, в цьому випадку необхідно:

- 1) перейти до рівнянь більш високого порядку, якщо експеримент проводився в області, близькій до екстремуму;
- 2) здійснити експеримент із меншим інтервалом варіювання, що призводить до необхідності збільшення числа паралельних дослідів. Треба розуміти, що при надмірному зменшенні Δx_i коефіцієнти b_i можуть стати статистично незначимими.

5.5. Опис лабораторного макету

Лабораторна установка представляє собою електронний пристрій (рис.5.3), що дозволяє виміряти в процесі експерименту вихідні параметри за рахунок зміни параметрів компонентів, імітуючи тим самим вплив параметрів складових блоків, вузлів на параметри пристрою. Таким чином, даний макет може бути використаний для оцінки похибок виготовлення електронного пристрою в залежності від похибок складових компонентів, а також похибок збору та монтажу пристрою.

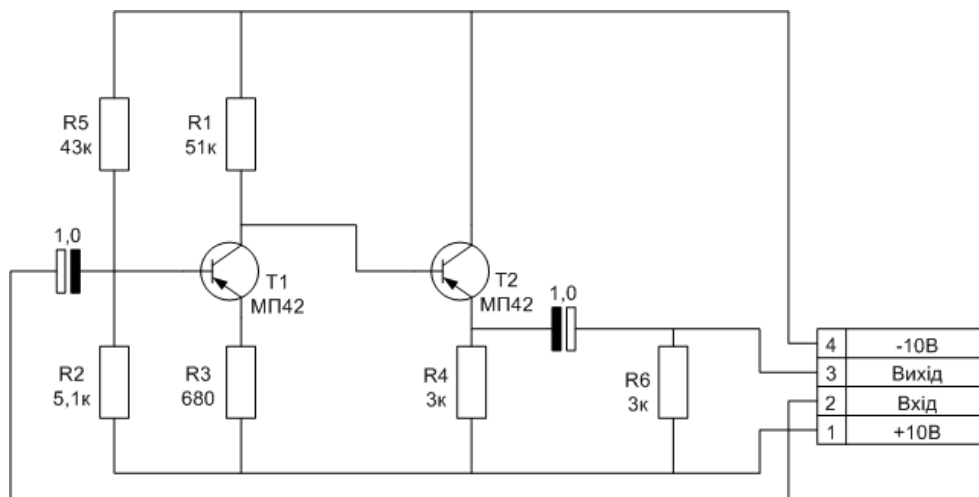


Рис.5.3. Принципова схема підсилювача.

Схема макета представляє собою двухкаскадний підсилювач, параметри x_i якого можуть змінюватися в широких межах. Вхід макету з'єднується з генератором ГЗ-34. До виходу макету підключається вольтметр і осцилограф С1-54.

5.6. Програма роботи

Проведення експерименту

1. Скласти матриці планування для ПФЕ при числі факторів $K=2;3$.
2. Провести експеримент в відповідності з заданою матрицею планування. Експеримент провести для двох інтервалів варіювання у відповідності з даними таблиці 5.4 для вказаного викладачем номеру експерименту.

Таблиця 5.4

Значення факторів	Номер експерименту							
	1		2		3		4	
	Δx_{i1}	Δx_{i2}	Δx_{i1}	Δx_{i2}	Δx_{i1}	Δx_{i2}	Δx_{i1}	Δx_{i2}
$X_1=R_1= 5,1\text{кОм}$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$
$X_2=R_2= 5,1\text{кОм}$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$	0	0	0	0
$X_3=R_3= 680\text{ Ом}$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$
$X_4=R_4= 3\text{кОм}$	0	0	0	0	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$	$\pm 10\%$	$\pm 20\%$

При цьому рекомендується подавати на вхід макету $U_{вх} = 100\text{мВ}$, $f=100\text{кГц}$ і вимірювати напругу на виході макету.

3. Провести оцінку коефіцієнтів поліному. Після обчислення коефіцієнтів проводиться оцінка їх значимості для визначення ступеня впливу різних факторів.
4. Отримати математичну модель у вигляді рівняння регресії, що містить тільки члени із значимими коефіцієнтами.
5. Перевірити адекватність отриманої моделі досліджуваному процесу з допомогою F -критерію Фішера.
6. Провести аналіз отриманої моделі, зробити висновки по роботі.

5.7. Виконання роботи:

1. Отримати вихідні дані.
2. Побудувати матрицю планування експерименту для заданої кількості факторів та віднести до неї отримані вихідні дані.
3. Розрахувати середні значення та дисперсії для кожної точки виходу плану.
4. Перевірити однорідність дисперсій за допомогою критерію Кохрена.
5. Визначити коефіцієнти моделі.
6. Визначити значимість коефіцієнтів моделі за допомогою критерію Ст'юдента.
7. Перевірити адекватність статистичної моделі.

8. Підтвердити результати за допомогою комп'ютерного обчислення.

5.8. Зміст звіту

1. Матрицю планування експерименту.
2. Статистичну модель.
3. Висновки.

5.9. Контрольні запитання

1. Перелічіть порядок проведення повного факторного експерименту.
2. Як визначається локальна область для проведення експерименту?
3. Як будується матриця планування?
4. Як експериментально оцінюються коефіцієнти впливу?
5. Як визначається значність коефіцієнтів регресії й адекватності моделі при ПФЕ?
6. Які висновки можна зробити в залежності від значення коефіцієнтів у моделі?

6. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ДРОБНОГО ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ (ДФЕ)

Мета роботи: ознайомитись з процедурою побудови математичних моделей за допомогою ДФЕ.

6.1. Теоретичні відомості

При збільшенні числа факторів у факторному експерименті типу 2^K , 3^K число спостережень швидко переростають можливість більшості дослідів. Так для ПФЕ типу 2^6 необхідно провести 64 експерименти. З 63 ступенів свободи в цьому випадку лише 6 відповідає головним ефектам, 15 – двофакторним взаємодіям, інші 42 ступені свободи припадають на взаємодію трьох і більше факторів. Якщо експериментатор із достатньою підставою може вважати деякі зі взаємодій високого порядку такими, що ними можна знехтувати, то інформацію про головні ефекти та взаємодії низького порядку можна отримати, проводячи лише дрібну долю ПФЕ.

Нехай необхідно отримати наближений математичний опис процесу при трьох факторах. В цьому випадку можна добуток $x_1 \cdot x_2$ замінити третьою змінною x_3 . Тоді можна провести експеримент, коли x_3 змінюється як $x_1 \cdot x_2$ (таблиця 6.1).

Таблиця 6.1.

Номер дослідів	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	y_1	y_2	\bar{y}
1	+	-	-	+	-	-	+	y_{11}	y_{21}	\bar{y}_1
2	+	+	-	-	-	+	+	y_{12}	y_{22}	\bar{y}_2
3	+	-	+	-	+	-	+	y_{13}	y_{23}	\bar{y}_3
4	+	+	+	+	+	+	+	y_{14}	y_{24}	\bar{y}_4

Тобто ПФЕ типу 2^3 замінимо ДФЕ $2^{3-1} = 4$. Такий скорочений план – половина ПФЕ – називається півреплікою від ПФЕ 2^3 . Або в загальному вигляді 2^{K-1} . Якщо « p » факторів змінюються на взаємодію високого порядку, то число експериментів буде рівне 2^{K-p} .

Наведене планування дає можливість оцінити вільний член b_0 та коефіцієнти при лінійних членах b_1, b_2, b_3 .

Однак складання такої матриці планування можливо, якщо припускається, що ефект взаємодії відсутній або мало впливає на вихідний параметр. Якщо це припущення не виконується, то знайдені коефіцієнти будуть оцінками для спільних ефектів. Наприклад

коефіцієнт b'_1 включає в себе два коефіцієнти b_1 і b_{23} оскільки стовпці при факторі x_1 і x_{23} мають однакові знаки. Тому: $b'_1 = b_1 + b_{23}$; $b'_2 = b_2 + b_{13}$; $b'_3 = b_3 + b_{12}$.

Ці ефекти не можуть бути окремо оцінені при плануванні, що складається всього з 4-х дослідів. В таких випадках найкраще проводити ПФЕ.

Матриця планування ДФЕ при фіксованих k та p може мати різну систему змішування, та природно, що дослідник прагне того, щоб максимальне число лінійних ефектів виявились не змішаними з парними взаємодіями. Звідси актуальність питання про роздільну здатність дрібної репліки, тобто можливості роздільної оцінки коефіцієнтів. Для характеристики роздільної здатності вводяться поняття «генеруючого співвідношення» (ГС) та «визначаючого контрасту» (ВК).

Вище вже було показано, що ДФЕ 2^{3-1} може бути представлений двома піврепліками, кожна з яких характеризується одним із наступних генеруючих співвідношень: $x_3 = x_1x_2$; $x_3 = -x_1x_2$.

Вираз ВК отримується множенням лівої та правої частин приведених ГС на x_3 . При цьому отримують наступний вираз: $x_3^2 = 1 = x_1x_2x_3$; $x_3^2 = 1 = -x_1x_2x_3$

Значення ВК дозволяє визначити всю систему спільних оцінок, не вивчаючи матрицю планування. Для цього треба послідовно помножити незалежні змінні на ВК:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2x_3; x_1 = -x_2x_3; \\ x_2 &= x_1x_3; x_2 = -x_1x_3; \\ x_3 &= x_1x_2; x_3 = -x_1x_2. \end{aligned}$$

Тобто ефект x_1 зв'язаний з взаємодією x_{23} , ефект x_2 – з x_{13} , а x_3 – з x_{12} .

Щоб отримати високу роздільну здатність, прагнучи таким чином побудувати план ДФЕ, щоб лінійні ефекти були змішані з взаємодіями найвищого порядку або з тими взаємодіями, про які апріорно відомо, що вони не впливають на процес. Оцінити роздільну здатність нам допомагає ГС: чим більше символів входить в ГС, тим звичайно вища роздільна здатність.

Наприклад, в експерименті з $k = 4$ в якості генеруючих співвідношень можуть бути взяті: $x_4 = x_1x_2x_3$ та $x_4 = x_1x_2$. Визначимо ВК та з їх допомогою знайдемо системи спільних оцінок:

$1 = x_1x_2x_3x_4$	$1 = x_1x_2x_4$
$x_1 = x_2x_3x_4$	$x_1 = x_2x_4$
$x_2 = x_1x_3x_4$	$x_2 = x_2x_4$
$x_3 = x_1x_2x_4$	$x_3 = x_1x_2x_3x_4$
$x_4 = x_1x_2x_3$	$x_4 = x_1x_2$
$x_1x_2 = x_2x_4$	$x_1x_3 = x_2x_3x_4$

$x_1x_3 = x_2x_4$	$x_2x_3 = x_1x_3x_4$
$x_1x_4 = x_2x_3$	$x_3x_4 = x_1x_2x_3$

Таким чином, якщо експериментатора перш за все цікавлять оцінки для лінійних ефектів, то слід вибрати ГС $x_4 = x_1x_2x_3$.

При дослідженні багатофакторних технологічних процесів використовують репліки й більшої степені дробності 1/4, 1/8 тощо. З ростом числа незалежних змінних росте розрішаюча здатність дробних реплік. Опис лабораторного макету для проведення ДФЕ наведено у додатку X.

6.2. Виконання роботи:

Порядок виконання лабораторної роботи такий же як і для ПФЕ. Відмінністю є тільки вибір генеруючого співвідношення (ГС) та розрахунку визначаючого контрасту (ВК), так як це вказано в теоретичних відомостях до роботи.

1.1. Зміст звіту

1. Роздруковані результати роботи з програмою ДФЕ, короткі теоретичні відомості про ДФЕ, значення вихідних даних та результатів розрахунків.
2. Висновки по лабораторній роботі.

6.3. Контрольні запитання:

1. Поясніть різницю між активним та пасивним експериментом.
2. Сутність ДФЕ.
3. Що таке фактори та які вимоги до них?
4. Що таке визначаючий контраст?
5. Що таке генеруюче співвідношення?

7. АПРОКСИМАЦІЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В БІОМЕДИЧНІЙ ЕЛЕКТРОНІЦІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРИРОДНОГО КУБІЧНОГО СПЛАЙНУ, ЛІНІЙНОГО ТА НЕЛІНІЙНОГО ЗГЛАДЖУВАНЬ

Мета роботи: ознайомитись з алгоритмами апроксимації експериментальних залежностей біоелектронних процесів за допомогою природного кубічного сплайну, лінійного та нелінійного згладжування, структурними схемами відповідних програм і інструкціями користувача.

7.1. Теоретичні відомості

Методи згладжування вихідних даних.

Будь-яке значення y_i , що спостерігається можна представити як суму двох компонентів:

істинного значення $f(x_i)$ та накладеної на нього статистичної похибки e_i . Таким чином

$$y_i = f(x_i) + e_i.$$

Наша мета полягає в тому, щоб зменшити похибку e_i . Для цієї мети застосовують метод згладжування даних – ковзаюче середнє. Застосуємо даний метод до даних представлених в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1. Згладжуючий ефект ковзаючого середнього

x	Значення y, що спостерігається	Згладжене значення Y	
		Перше згладжування	Друге згладжування
35	95	—	—
36	638	—	—
<u>37</u>	191	<u>324</u>	—
38	419	381	—
39	278	331	380
40	381	425	431
41	384	437	501
<u>42</u>	665	<u>584</u>	599
43	477	727	678
44	1015	822	760
45	1093	845	825

46	860	922	852
47	779	909	871
48	862	864	905
49	951	913	940
50	866	1016	1003
51	1109	1098	1115
52	1291	1224	—
53	1274	1425	—
54	1579	1500	—
<u>55</u>	1873	<u>1642</u>	—
...
<u>69</u>	<u>5835</u>	—	—
70	6103	—	—

Застосуємо формулу ковзаючого середнього

$$Y_i = \frac{1}{5}(y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2})$$

Відмітимо три властивості ковзаючого середнього:

1. Зменшення нерегулярних коливань в ряді;
2. Згладженні значення зміщуються зверху вниз і зліва направо;
3. Зменшуються початкові і кінцеві значення в ряді.

Після згладжування зручно застосовувати для опису даних експерименту сплайн-методи.

Завжди можна підібрати такий многочлен, крива якого пройде через n заданих точок(якщо дві з них не лежать на одній і тій же вертикалі). В загальному випадку порядок такого многочлену становить $n-1$. Часто такі задачі розв'язують з допомогою сплайнів.

Сплайном (або кусково-спряженою функцією) називають таку функцію, крива якої складається з відрізків поліноміальних кривих. Ці відрізки зі стиковані так, що похідні отриманої функції неперервні на всьому проміжку який розглядається.

Апроксимація залежності $y = f(x)$ природним кубічним сплайном на довільній сітці: $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$; $x \in [x_i, x_{i+1}]$ має вигляд:

$$S_p(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1}h_i}{6}\right) \cdot (x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{M_i h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x); \quad i = \overline{1, N_1 - 1} \quad (7.1)$$

де M_i – деякі сталі; $h_i = x_{i+1} - x_i$ – крок довільної сітки; N_1 – кількість точок сплайну.

При нульових граничних умовах $M_0 = 0$; $M_{N_1} = 0$ сталі M_{i+1} ($i = \overline{1, N_1 - 1}$), визначаються з наступного виразу:

$$M_{i+1} + \frac{2(h_{i-1} + h_i)}{h_i} M_i + \frac{h_{i-1}}{h_i} M_{i-1} = \frac{6}{h_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right); \quad i = \overline{1, N_1 - 1} \quad (7.2)$$

Тоді сталі M_i ($i = \overline{1, N_1 - 1}$) розраховуються з виразу (7.2) за формулою:

$$M_i = l M_{i+1} + f_i; \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad (7.3)$$

де

$$l_i = -\frac{1}{\frac{2(h_{i-1} + h_i)}{h_i} + \frac{h_{i-1}}{h_i} l_{i-1}}; \quad (7.4)$$

$$f_i = -l_i \left[\frac{6}{h_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) - f_{i-1} \right]. \quad (7.5)$$

Формула для лінійного згладжування значення y_i ($i = \overline{1, N}$) за п'ятьма точками має вигляд:

$$\bar{y}_i = \frac{(y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2})}{5}, \quad (7.6)$$

де чотири крайні точки (дві перших і дві останніх) набувають наступних значень:

$$\begin{aligned}
\bar{y}_1 &= \frac{(3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4)}{5}, \\
\bar{y}_2 &= \frac{(4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4)}{10}, \\
&\text{К К К К К К К К К}, \\
\bar{y}_{n-1} &= \frac{(x_{n-3} + 2x_{n-2} + 3x_{n-1} + 4x_n)}{10}, \\
\bar{y}_n &= \frac{(3x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3})}{5}.
\end{aligned}
\tag{7.7}$$

Розглянемо множину точок на площині, значення яких представлені в таблиці 7.1 і апроксимуємо дані експерименту після другого згладжування кубічним сплайном. Для цього припустимо, що уже є многочлен ступеню три або нижче, крива якого проходить через точки $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$. Тепер нам необхідно знайти такий многочлен третього ступеню

$$y = A + B(x-b) + C(x-b)^2 + D(x-b)^3, \tag{7.8}$$

крива якого проходила б через точки $(b, f(b))$ і $(c, f(c))$. Необхідно визначити значення чотирьох констант A, B, C, D , а значення $f(b)$ і $f(c)$ розглядаються як два обмеження. Можна також обумовити, щоб крива в точці $x = b$ мала б такий же нахил і таке ж значення другої похідної, що і у знайденого уже многочлена. Тепер ми маємо чотири рівняння, які мають задовольняти невідомим A, B, C, D

$$\begin{aligned}
f(b) &= A \\
f(c) &= A + B(c-b) + C(c-b)^2 + D(c-b)^3 \\
f'(b) &= B \\
f''(b) &= 2C
\end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned}
A &= f(b) \\
B &= f'(b) \\
C &= \frac{1}{2} f''(b) \\
D &= \{f(c) - A - B(c-b) - C(c-b)^2\} / (c-b)^3
\end{aligned}
\tag{7.9}$$

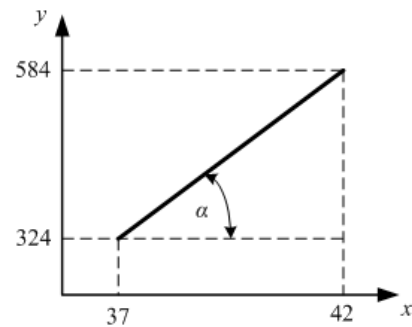
Тепер можна здійснювати інтерполяцію між значеннями b і c . Коли цей етап виконаний, знаходять криву, що проходить через значення $f(b)$ і $f(c)$. Для цього потрібно обчислити тангенс кута нахилу (перша похідна) і другу похідну нашого многочлена в точці $x=c$, а саме

$$\begin{aligned}
f'(c) &= B + 2C(c-b) + 3D(c-b)^2 \\
f''(c) &= 2C + 6D(c-b)
\end{aligned}
\tag{7.10}$$

Для нашого прикладу таблиця 7.1 спочатку необхідно вибрати опорні точки. Візьмемо за основу значення ковзаючи середніх в точках $x=37$; $x=42$; $x=55$; і значення в точці $x=69$ і проведемо криву через ці точки (таблиця 7.2)

Таблиця 7.2

	x	y	
$tg\alpha = \frac{584-324}{42-37} a$ \rightarrow	37	324	$f(a)$
$b \rightarrow$	42	584	$f(b)$
$c \rightarrow$	55	1642	$f(c)$
$d \rightarrow$	69	5835	$f(d)$



Представляється зручним відрізок в проміжку між $x=37$ і $x=42$ апроксимувати прямою лінією з $tg\alpha=52$ і другою похідною в точці $x=42$, що рівна «0».

З формули 7.9 отримаємо

$$A = 584; B = 52; C = 0$$

$$D = (1642 - 584 - 52 \cdot 13 - 0 \cdot 13^2) / 13^2 = 0.1738$$

З допомогою 7.8 можна виконати інтерполяцію для проміжку між $x=42$ і $x=55$.

Для того, щоб визначити наступний відрізок кривої необхідно обчислити $f'(x)$ і $f''(x)$ в точці $x=55$. В відповідності з формулою 7.10 отримаємо

$$f'(55) = 52 + 2 \cdot 0 \cdot 13 + 3 \cdot 0.1738 \cdot 13^2 = 140.1538$$

$$f''(55) = 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0.1738 \cdot 13 = 13.5621$$

Отже, для наступного відрізка кривої отримують значення:

$$A = 1642; B = 140.1538; C = \frac{1}{2} \cdot 13.5621 = 6.781$$

$$D = (5835 - 1642 - 140.1538 \cdot 14 - 6.781 \cdot 14^2) / 14^3 = 0.3286$$

Після цього можна перейти до інтерполяції в проміжку між $x=55$ і $x=69$.

Таким чином відрізок кривої між $x=42$ і $x=55$ апроксимується поліномом

$$y = 584 + 52x + 0.17x^3$$

В точці $x=55$ значення y буде мати наступне значення

$$y = 584 + 52(55 - 42) + 0.17(55 - 42)^3 \approx 1634.$$

За даними експерименту $y=1642$ (табл. 7.1; 7.2). Наступний відрізок кривої апроксимується

$$y = 1642 + 140.15(x - 55) + 6.78(x - 55)^2 + 0.328(x - 55)^3$$

7.2. Схема програми апроксимації експериментальних залежностей.

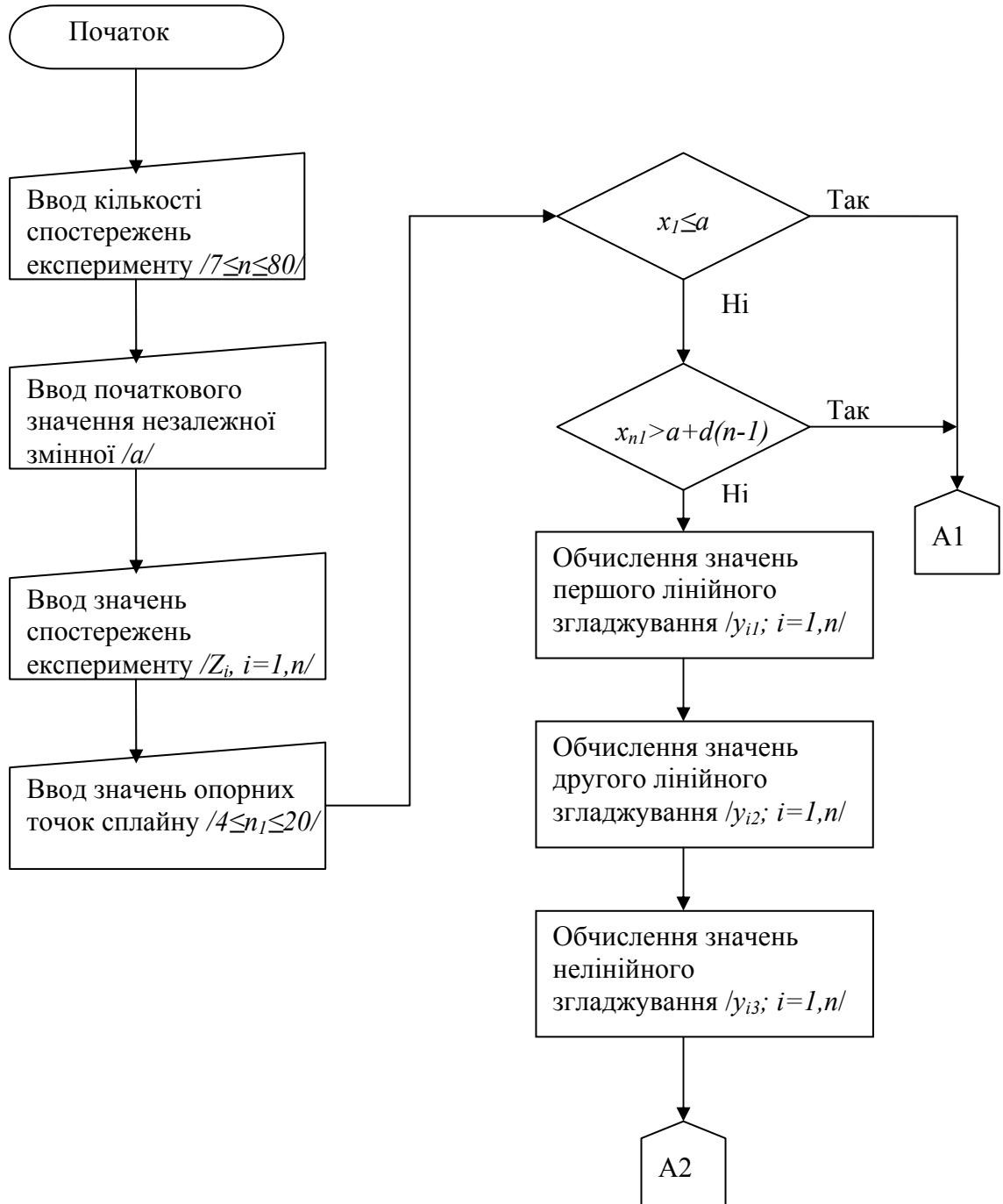


Рис 7.1.

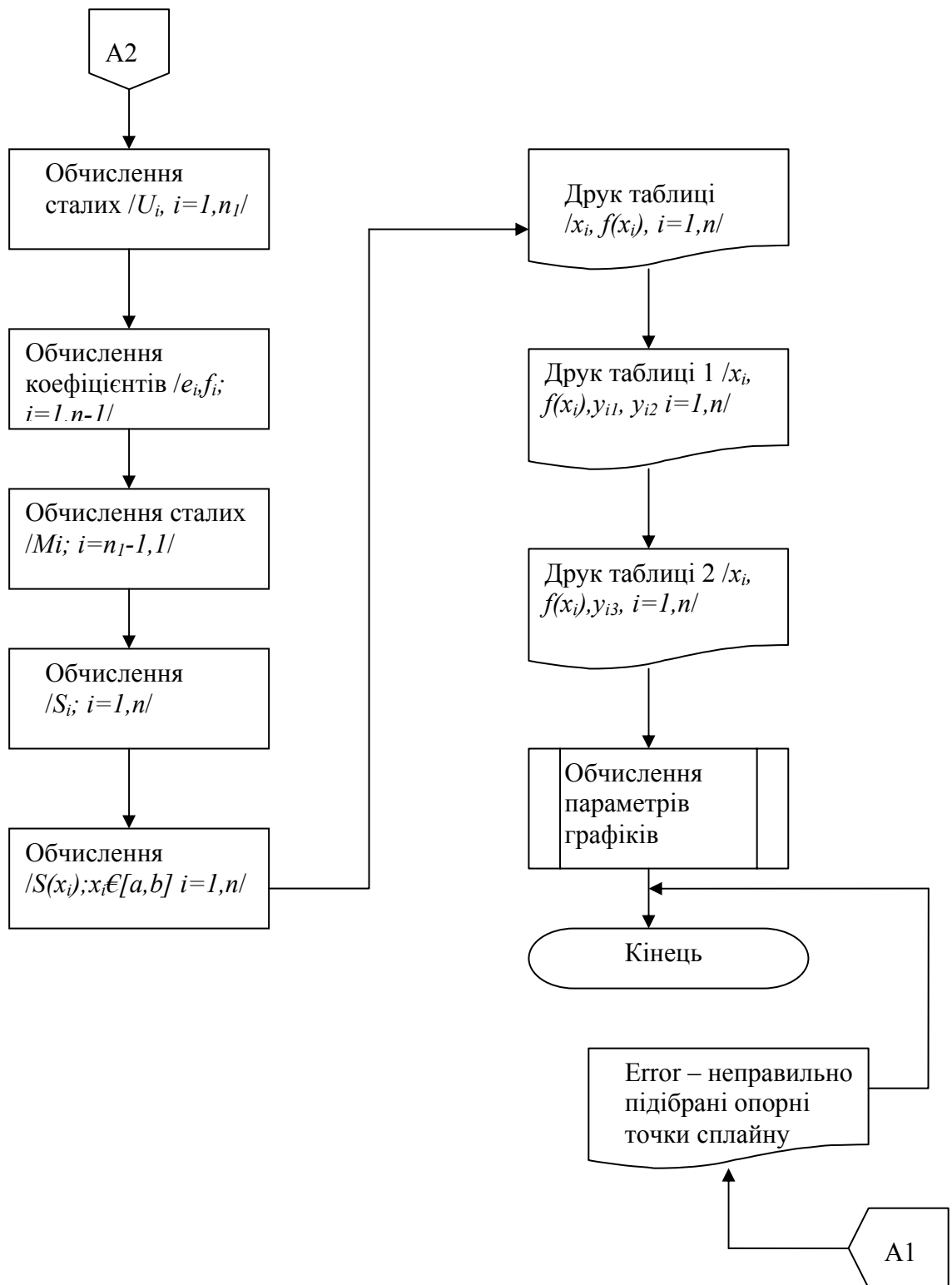


Рис 7.2.

7.3. Виконання роботи:

Для виконання роботи необхідно побудувати програму. Вихідними даними програми є кількість спостережень експерименту ($7 \leq n \leq 80$), початкові значення та крок зміни незалежної змінної; значення спостереження експерименту; кількість опорних точок сплайну ($4 \leq n_1 \leq 20$) та значення опорних точок сплайну за незалежною змінною (за зростанням).

1.2. Зміст звіту

1. Набори значень вихідних даних, таблиць і графіків значень незалежної змінної, спостережень експерименту, розрахованні значення першого та другого лінійного згладжування, нелінійного згладжування та сплайну.
2. Висновки по лабораторній роботі.

7.4. Контрольні запитання:

1. Як визначається природний кубічний сплайну?
2. Як розраховуються чотири крайні точки лінійного згладжування?
3. Як звичайно апроксимується початкова ділянка поліному?
4. Який вигляд має алгоритм апроксимації?
5. Які рекомендації по вибору опорних точок?
6. Чому неможна апроксимувати сплайн методом експериментальні значення якщо дві точки лежать на одній вертикалі?
7. Як змінюються вихідні дані при згладжуванні?
8. Чим пояснюється відмінність $y=1642$, одержане експериментально, від значення $y \approx 1634$, одержане за моделлю?

8. МАТЕМАТИЧНО – СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА НАДІЙНІСТЮ.

Мета роботи: ознайомлення студентів з основними вихідними матеріалами для аналізу надійності апаратури, з формою врахування відмов і найпростішими методами обробки результатів досліджень.

8.1. Теоретичні відомості:

Основні терміни і поняття надійності.

Об'єкт – предмет визначеного цільового призначення, що розглядається в період проектування, виробництва, експлуатації, вивчення дослідження та випробування на надійність. Об'єктами можуть бути системи і їх елементи.

Надійність – властивість об'єкту, полягає в його здібності виконувати визначенні задачі в визначених умовах експлуатації.

Елемент – об'єкт, який представляє собою найпростішу частину системи.

Безвідмовність – властивість об'єкту безперервно зберігати працездатність.

Справність – стан об'єкту, при якому він відповідає всім вимогам, встановленим нормативно-технічною документацією.

Несправність – стан об'єкту, при якому він не здатний нормально виконувати хоча б одну з заданих функцій.

Відмова – подія, яка полягає в порушенні працездатності об'єкту.

Раптова відмова – відмова, що характеризується стрибкоподібною зміною одного або декількох основних параметрів об'єкту.

Поступова (параметрична) відмова – відмова, що характеризується поступовою зміною одного або декількох основних параметрів об'єкту.

Ймовірність безвідмовної роботи – ймовірність того, що в межах заданого напрацювання відмова об'єкту не відбудеться.

Середнє напрацювання до відмови – математичне очікування напрацювання до першої відмови.

Основні показники надійності.

1. Ймовірність безвідмовної роботи об'єкту в інтервалі часу від 0 до t_0

$$P(t_0) = P(0; t_0) = 1 - F_1(t_0) \quad (8.1)$$

де $F_1(t_0)$ – функція розподілу випадкової величини θ_1 – часу роботи об'єкту до відмови ($\theta_1 \geq t_0$); $P(t_0)$ – ймовірність того, що об'єкт пропрацює безвідмовно протягом заданого часу роботи t_0 , почавши працювати в момент часу $t=0$, або ймовірність того, що час роботи об'єкту до відмови вийде більшим заданого часу t_0 .

При обробці даних досліджень на надійність виробів електроніки, зазвичай

$$\hat{P}(t_0) = \frac{N(t_0)}{N(0)} = \frac{(1 - n(t_0))}{N_0}, \quad (8.2)$$

де $N(t_0)$ – число справних об'єктів в момент часу t_0 ; $N(0)$ – число справних об'єктів в момент часу $t=0$; $n(t_0)$ – число об'єктів, що відмовили за час t_0 . (рис. 8.1)

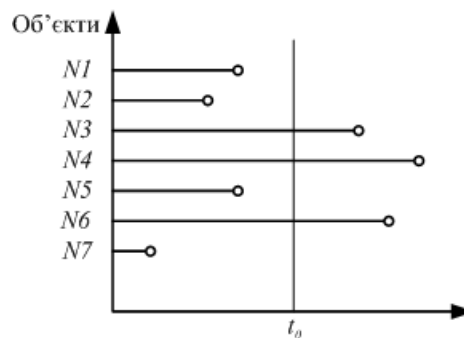


Рис. 8.1. Часова діаграма, яка пояснює статистичне визначення понять $\hat{P}(t_0)$ і $\hat{Q}(t_0)$.

Реалізації №1-7 складають $N(0)$ об'єктів; реалізації №1, 2, 5, 7 складають $n(t_0)$, а реалізації № 3, 4, 6 складають $N(t_0)$ об'єктів.

2. Ймовірність безвідмовної роботи об'єкту в інтервалі часу від t до $t+t_0$

$$P(t, t+t_0) = \frac{P(0, t+t_0)}{P(0, t)} = \frac{P(t+t_0)}{P(t)}, \quad (8.3)$$

де $P(t, t+t_0)$ – ймовірність того, що об'єкт безвідмовно пропрацює на протязі заданого часу роботи t_0 , що починається з моменту часу t , або умовна ймовірність того, що випадковий час роботи об'єкту до відмови виявиться більшим за величину $t+t_0$, за умови, що об'єкт вже пропрацював безвідмовно до моменту часу t . Ця ж величина визначена за даними досліджень

$$\hat{P}(t, t+t_0) = \frac{N(t+t_0)}{N(t)}, \quad (8.4)$$

де $N(t)$ – число об'єктів, справних до моменту часу t ; $P(t, t+t_0)$ – відношення числа об'єктів, які пропрацювали до моменту часу $t+t_0$ до числа об'єктів, справних до моменту часу t . Або частість події, яка полягає в тому, що реалізація часу роботи об'єкту до відмови виявиться більшою за величину t .

3. Ймовірність відмови об'єкту в інтервалі часу від 0 до t_0

$$Q(t_0) = Q(0, t_0) = P(\theta_1 < t_0) = F(t_0), \quad (8.5)$$

де $Q(t_0)$ – ймовірність того, що об'єкт відмовить на протязі заданого часу роботи t_0 , почавши працювати в початковий момент часу $t=0$. Завжди дотримується рівність (рис. 8.2)

$$Q(t_0) = 1 - P(t_0). \quad (8.6)$$

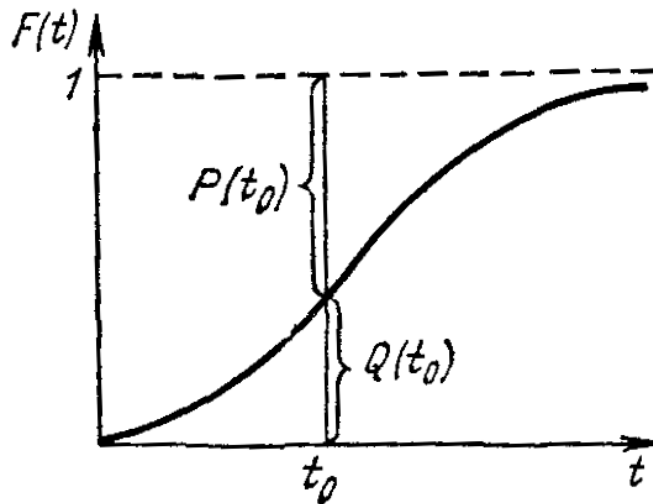


Рис. 8.2. Пояснення формул для $Q(t_0)$ та $P(t_0)$.

За даними експерименту

$$\hat{Q}(t_0) = \frac{n(t_0)}{N(0)}, \quad (8.7)$$

де $n(t_0)$ – число об'єктів, що відмовили до моменту часу t_0 . Під $\hat{Q}(t_0)$ розуміють частість події, яка полягає в тому, що реалізація часу роботи об'єкту до відмови виявиться меншою за величину t_0 (рис. 8.1).

4. Ймовірність відмови об'єкту в інтервалі від t до $t+t_0$

$$Q(t, t+t_0) = 1 - P(t, t+t_0) = 1 - \frac{P(t+t_0)}{P(t)}, \quad (8.8)$$

де $Q(t, t+t_0)$ – ймовірність того, що об'єкт відмовить на протязі заданого часу роботи t_0 , що починається з моменту часу t , або умовна ймовірність того, що випадковий час роботи об'єкту до відмови виявиться меншим за величину $t+t_0$, за умови, що об'єкт вже пропрацював безвідмовно до моменту часу t (рис. 8.3).

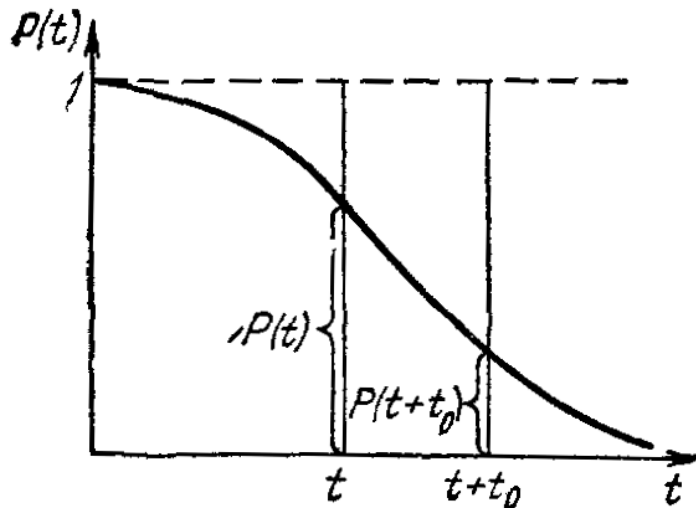


Рис. 8.3. Пояснення формул для $Q(t, t+t_0)$ та $P(t, t+t_0)$.

За даними статистичних досліджень

$$\hat{Q}(t, t+t_0) = \frac{n(t+t_0)}{N(t)} = 1 - \frac{N(t+t_0)}{N(t)} = \frac{\Delta n(t, t_0)}{N(t)}, \quad (8.9)$$

де $n(t)$ – число об'єктів, що відмовили до моменту часу t , $\Delta n(t, t_0)$ – число об'єктів, що відмовили саме в момент часу $[t, t+t_0]$. На практиці цей інтервал повинен бути досить великим. $\hat{Q}(t, t+t_0)$ – відношення числа об'єктів, що відмовили саме в інтервалі $[t, t+t_0]$ до числа об'єктів, справних до моменту часу t або частість події, яка полягає в тому, що реалізація часу роботи об'єкту до відмови виявиться меншою за величину $t+t_0$ за умови, що ця реалізація більша за величину t (рис. 8.4).

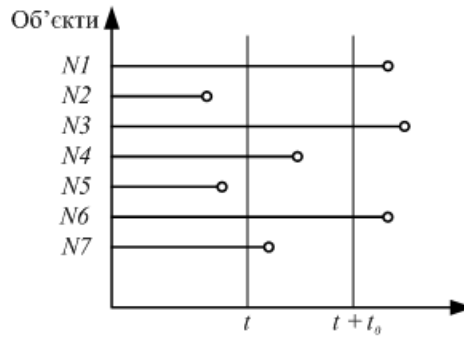


Рис. 8.4. Часова діаграма, яка пояснює статистичне визначення понять $\hat{P}(t, t+t_0)$ і $\hat{Q}(t, t+t_0)$; $f(t)$ і $\lambda(t)$. Реалізації №1-7 складають $N(0)$ об'єктів; реалізації № 2, 5 складають $n(t)$, реалізації № 2, 4, 5, 7 складають $n(t+t_0)$, реалізації № 1, 3, 4, 6, 7 складають $N(t)$, а реалізації № 1, 3, 6 складають $N(t+t_0)$ об'єктів.

5. Густина розподілу відмов об'єкту $f(t)$

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = -\frac{d}{dt} P(t), \quad (8.10)$$

де $F(t)$ – функція розподілу часу роботи до першої відмови. Або статистичне визначення за даними експерименту

$$\hat{f}(t) = \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{N(0)\Delta t} = -\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N(0)\Delta t} = \frac{\Delta n(t, \Delta t)}{N(0)\Delta t} \quad (8.11)$$

Див. рис. 8.4 з заміною t_0 на Δt .

6. Інтенсивність відмови (частота) об'єкту в момент часу t $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{1}{1-F(t)} \cdot \frac{d}{dt} F(t) = \frac{f(t)}{P(t)}, \quad (8.12)$$

для цього випадку передбачається, що до часу t відмова виробу не відбудеться.

Статистичне визначення

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{\Delta n(t, \Delta t)}{N(t)\Delta t}. \quad (8.13)$$

7. Середній час роботи об'єкту до відмови T_1

$$T_1 = M\{\theta_1\} = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xdQ(x) = \int_0^{\infty} P(x)dx. \quad (8.14)$$

Статистичне визначення

$$T_1 = \frac{1}{N(0)} \left(\theta_1^{(1)} + \theta_1^{(2)} + \theta_1^{(N(0))} \right) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \theta_1^{(i)} = \sum_{i=1}^{N(0)} \frac{N(0) - i + 1}{N(0)} \left(\theta_1^{(i)} - \theta_1^{(i-1)} \right)$$

де прийнято, що $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)} \leq \dots \leq \theta_1^{(N(0))}$ причому $\theta_1^{(0)} = 0$.

Тут T_1 – середнє арифметичне реалізацій часу роботи об'єкту до відмови (рис. 8.5).

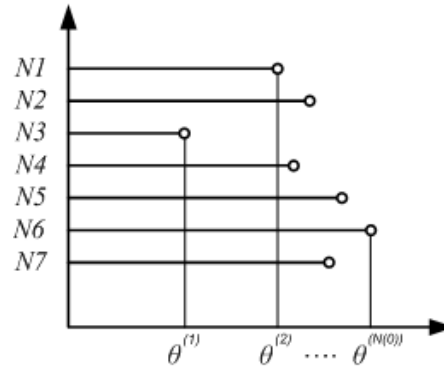


Рис. 8.5. Часова діаграма, що пояснює статистичне визначення поняття T_1 .

Знання будь-якої однієї із функцій $P(t)$; $Q(t)$; $f(t)$; $\lambda(t)$ дає можливість визначити решту (табл. 8.1).

Таблиця 8.1. Функціональний зв'язок між показниками надійності

Відома функція	Формули для визначення 3 інших функцій			
	$P(t)$	$Q(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$P(t)$	—	$1 - P(t)$	$-\frac{d}{dt} P(t)$	$-\frac{1}{P(t)} \frac{d}{dt} P(t)$
$Q(t)$	$1 - Q(t)$	—	$\frac{d}{dt} Q(t)$	$\frac{1}{1 - Q(t)} \frac{d}{dt} Q(t)$
$f(t)$	$\int_t^\infty f(x) dx$	$\int_0^t f(x) dx$	—	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(x) dx}$
$\lambda(t)$	$e^{-\int_0^t \lambda(x) dx}$	$1 - e^{-\int_0^t \lambda(x) dx}$	$\lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(x) dx}$	—

Математичне визначення основних показників надійності за даними експерименту.

Якщо відомий закон розподілу часу роботи елемента до відмови $F(t) = P\{\theta \leq t\}$, то середній час безвідмовної роботи

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} [F(t_{i+1}) - F(t_i)] \cdot t_i \tag{8.15}$$

або також в вигляді (див рис. 8.6)

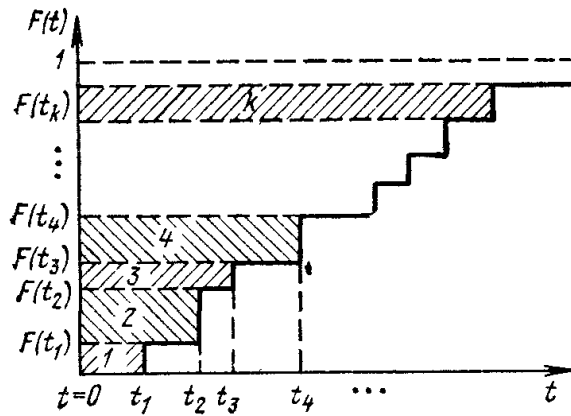


Рис. 8.6. Пояснення формули (8.15). 1... K – площа, що рівна сумі від 1 до K-го доданку в формулі (8.15)

Вираз 8.15 можна представити у вигляді:

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} P(t_i)(t_{i+1} - t_i). \quad (8.16)$$

Для $\lambda(t)$ при $t_i \leq t < t_{i+1}$, для дискретного розподілу

$$\lambda(t) = \frac{F(t_{i+1}) - F(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)F(t_i)} \quad (8.17)$$

Методика розрахунку основних показників надійності на прикладах розглянута нижче

Приклад 1. Нехай при випробовуваннях $N=35$ елементів після кожної години фіксувалося число відмов, що відбулися, і результати цих випробувань зводилися в таблицю.

Таблиця 8.2. Результати випробувань

Момент часу t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число відмов $n(t_i)$	0	3	3	5	8	7	6	2	1	0

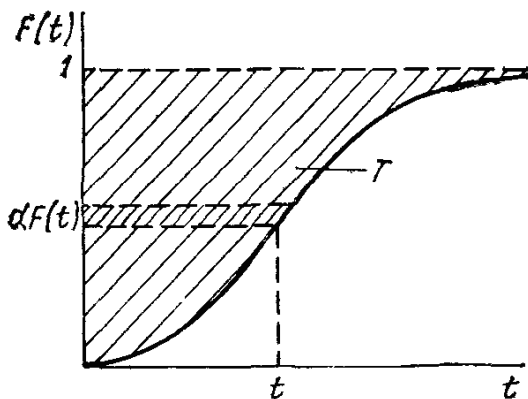


Рис. 8.7. Пояснення принципу інтегрування за формулою $T = \int_0^{\infty} t dF(t)$.

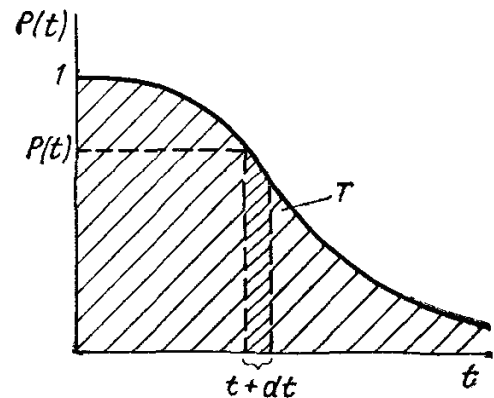


Рис. 8.8. Пояснення принципу інтегрування за формулою $T = \int_0^{\infty} P(t) dt$.

Необхідно побудувати емпіричну функцію розподілу і обчислити основні показники надійності елементу, прийнявши емпіричну функцію в якості істинної.

Розв'язання.

1. Для цього випадку емпіричну функцію розподілу можна визначити за формулою

$$F(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^i n(t_k)$$

і записати у вигляді наступної таблиці:

Таблиця 8.3. Емпірична функція розподілу

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(t_i)$	0	0.086	0.172	0.314	0.543	0.743	0.914	0.971	1.00	1.00

2. Ймовірність безвідмовної роботи для $t_0 = 4$ год.: $P(4) = 1 - F(4) = 1 - 0.314 = 0.686$.

3. Ймовірність відмови за час $t_0 = 4$ год.: $Q(4) = F(4) = 0.314$.

4. Ймовірність безвідмовної роботи в інтервалі часу від $t = 2$ год. до $t+t_0 = 6$ год., за умови, що елемент пропрацював безвідмовно 2 год.:

$$P(2;6) = \frac{1 - F(6)}{1 - F(2)} = \frac{1 - 0.743}{1 - 0.086} \approx 0.28$$

5. Ймовірність відмови в інтервалі часу від $t = 2$ год. до $t+t_0 = 6$ год., за умови, що елемент пропрацював безвідмовно 2 год.:

$$Q(2;6) = 1 - P(2;6) = 1 - 0.28 = 0.72$$

6. Середній час роботи до відмови знаходимо за формулами (8.15) та (8.16) відповідно:

$$T = \Delta t \sum_{i=1}^{10} P(t_i) = 1 + 0.914 + 0.828 + 0.786 + 0.475 + 0.257 + 0.086 + 0.029 = 4.357 \text{ год}$$

$$T = \sum_{i=1}^{10} [F(t_{i+1}) - F(t_i)] \cdot t_i = 2 \cdot 0.086 + 3(0.172 - 0.086) + 4(0.314 - 0.172) + 5(0.543 - 0.314) + 6(0.743 - 0.543) + 7(0.914 - 0.743) + 8(0.971 - 0.914) + 9(1 - 0.971) \approx 4.357 \text{ год}$$

7. Інтенсивність відмов (як функцію часу) найзручніше обчислювати в цьому випадку безпосередньо з даних випробувань за формулою

$$\lambda(t_i) = \frac{n(t_i)}{\left[N - \sum_{j=1}^{i-1} n(t_j) \right] (t_i - t_{i-1})},$$

де $t_0 = 0$.

Результати обчислень зведені у наступну таблицю:

t_i , ГОД.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda(t_i)$, 1/год.	0	$3/35=$ $=0.086$	$3/32=$ $=0.095$	$5/29=$ $=0.172$	$8/21=$ $=0.333$	$7/16=$ $=0.437$	$6/9=$ $=0.667$	$2/3=$ $=0.667$	1.00

Приклад 2. Нехай закон розподілу часу роботи елементу до відмови є нормальним з середнім значенням $T=100$ год. та дисперсією $\sigma^2 = 1000$ год². Необхідно обчислити основні показники надійності елементу.

Розв'язання.

1. Ймовірність безвідмовної роботи за час $t_0 = 70$ год. і $t_0 = 130$ год.:

$$P(t_0) = \Phi\left\{\theta \geq t_0 | T, \sigma\right\} = \Phi\left\{\frac{\theta - T}{\sigma} \geq \frac{t_0 - T}{\sigma}\right\} =$$

$$= 1 - \Phi\left\{\frac{\theta - T}{\sigma} \leq \frac{t_0 - T}{\sigma}\right\} = 1 - \Phi\left\{\frac{t_0 - T}{\sigma}\right\},$$

де $\Phi(y)$ – нормована функція нормального розподілу.

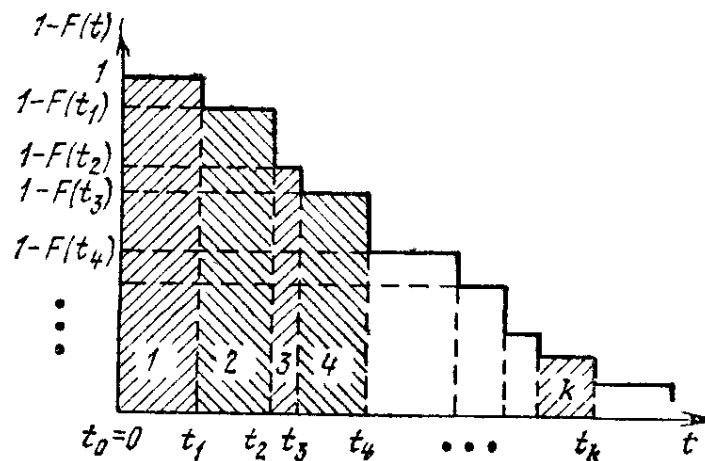


Рис. 8.9. Пояснення формули (8.16). 1... K – площа, що рівна сумі від 1 до K-го доданку в формулі (8.16)

За таблицею VI Додатку знаходимо

$$P(70) = 1 - \Phi\left(\frac{70 - 100}{31.6}\right) = 1 - \Phi(-0.95) = \Phi(0.95) = 0.829$$

$$P(130) = 1 - \Phi\left(\frac{130 - 100}{31.6}\right) = 1 - \Phi(0.95) = 0.171$$

2. Ймовірність відмови за час $t_0 = 70$ год. і $t_0 = 130$ год.:

$$Q(70) = 1 - 0.829 = 0.171, Q(130) = 1 - 0.171 = 0.829.$$

3. Ймовірність безвідмовної роботи в інтервалі часу від $t = 70$ год. до $t + t_0 = 90$ год.:

$$P(70;90) = \frac{1 - \Phi\left(\frac{90-100}{31.6}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{70-100}{31.6}\right)} = \frac{\Phi(0.32)}{\Phi(0.95)}.$$

За таблицею VI знаходимо $\Phi(0.32) = 0.626$, тоді $P(70;90) = 0.626/0.829 \approx 0.755$.

4. Ймовірність відмови в інтервалі часу від $t = 70$ год. до $t+t_0 = 90$ год.:

$$Q(70;90) = 1 - P(70;90) = 0.215.$$

5. Середній час роботи до відмови задано в умові задачі: $T=100$ год.

6. Інтенсивність відмов для $t = 70$ год. і $t = 130$ год. Попередньо знаходимо за таблицею VII Додатку знаходимо значення густини нормального розподілу

$$\varphi\left(\frac{70-100}{31.6}\right) = \varphi\left(\frac{130-100}{31.6}\right) = \varphi(0.95) = 0.254,$$

тоді

$$\lambda(70) = \frac{\varphi(0.95)}{1 - \Phi(-0.95)} = \frac{\varphi(0.95)}{\Phi(0.95)} = \frac{0.254}{0.829} = 0.306,$$

$$\lambda(130) = \frac{\varphi(0.95)}{1 - \Phi(0.95)} = \frac{0.254}{0.171} = 1.485.$$

Експоненціальний розподіл.

В таблиці 8.5 наведено основні показники надійності елементу для експоненціального розподілу часу до відмови. Пояснення основних формул цієї таблиці подано на рис. 8.10.

Таблиця 8.5. Невідновлюваний елемент. Експоненціальний закон розподілу часу до

відмови $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Показник	Точне значення	Наближене значення	Похибка
$P(t_0)$	$e^{-\lambda t_0}$	$1 - \lambda t_0$	$\delta_+ < \frac{(\lambda t_0)^2}{2}$
$Q(t_0)$	$1 - e^{-\lambda t_0}$	λt_0	$\delta_- < \frac{(\lambda t_0)^2}{2}$
$P(t, t+t_0)$	$e^{-\lambda t_0}$	$1 - \lambda t_0$	$\delta_+ < \frac{(\lambda t_0)^2}{2}$
$Q(t, t+t_0)$	$1 - e^{-\lambda t_0}$	λt_0	$\delta_- < \frac{(\lambda t_0)^2}{2}$
T	$1/\lambda$	—	—
$\lambda(t)$	λ	—	—

Наближені значення наводяться для умови $\lambda t_0 = 1$.

Практично наближені значення можна застосовувати, якщо $\lambda t_0 < 1$.

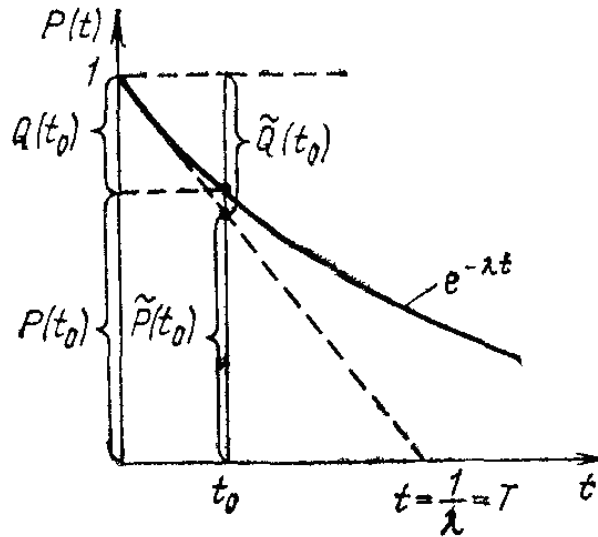


Рис. 8.10. Пояснення основних формул таблиці 8.5.

Приклад 3. Нехай елемент має експоненціальний розподіл часу роботи до відмови з параметром розподілу

$$\lambda = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/год.}$$

Необхідно обчислити основні показники надійності елементу.

Розв'язання.

1. Ймовірність безвідмовної роботи за час $t_0 = 2000$ год.

$$P(2000) = e^{-2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 2000} = e^{-0.05} = 0.9512$$

Наближене значення

$$\tilde{P}(2000) \approx 1 - 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 2000 = 0.95$$

2. Ймовірність відмови за час $t_0 = 2000$ год.

$$Q(2000) = 1 - 0.9512 = 0.0488$$

Наближене значення

$$\tilde{Q}(2000) \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 2000 = 0.05$$

3. Ймовірність безвідмовної роботи в інтервалі часу від $t = 500$ год. до $t+t_0 = 2500$ год., за умови, що елемент пропрацював безвідмовно 500 год.:

$$P(500; 2500) = e^{-2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 2000} = e^{-0.05} = 0.9512.$$

Наближене значення

$$\tilde{P}(500; 2500) \approx 1 - 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 2000 = 0.95.$$

4. Ймовірність відмови в інтервалі часу від $t = 500$ год. до $t+t_0 = 2500$ год., за умови, що елемент пропрацював безвідмовно 500 год.:

$$Q(500; 2500) = 1 - 0.9512 = 0.0488.$$

Наближене значення

$$Q(500; 2500) \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 2000 = 0.05.$$

5. Середній час роботи до відмови

$$T = 1 / (2.5 \cdot 10^{-5}) = 40000 \text{ год.}$$

Форма обліку відмов та найпростіші методи обробки даних за надійністю.

Рекомендовано в якості вихідного матеріалу для аналізу надійності використовувати табличну форму відображення інформації на паперових або електронних носіях. Відомість відмов в такому випадку буде мати вигляд табл.8.6.

Таблиця 8.6. Приклад зведеної відомості для комплекту апаратури.

Номер відмови	Дата	Номер блоку	Характеристика відмови	Напрацювання апаратури до моменту відмови, год	Зовнішня причина відмови	Прийняті міри
1	05.02.2012	01	Вихідна напруга не відповідає ТУ	21	В ІМС 1УТ221 пробій базового елемента	ІМС замінена
2	10.02.2012	02	Не спрацьовує реле Р-1	52	Пробій транзистора	Транзистор замінено
3	07.03.2012	01	Періодичне зникання вихідного сигналу	65	Змінний контакт всередині ІМС 1Р141А	ІМС замінена
4	14.03.2012	03	Відсутність АРК	83	Перегорів опір МЛТ	Опір замінено
5	22.03.2012	03	Зменшився коефіцієнт підсилення	98	Пробій конденсатора К-53-1	Конденсатор замінено

За даними зведеної відомості для кожного комплекту апаратури складається часова діаграма потоку відмов в залежності від напрацювання (рис. 8.11). На цьому рисунку кружечками позначені моменти появи відмов об'єктів, а відрізки прямих між кружечками називають напрацюваннями між відмовами. При обробці експериментальних даних обчислюють відповідні кожному інтервалу напрацювання або час Δt_i . Статистичні значення потоку відмов ω_i^* визначаються за формулою

$$\omega_i = \frac{\Delta n_i}{N_1 \cdot \Delta t_i}, \quad (8.18)$$

де N_1 – число об'єктів або число місць на яких працюють дані об'єкти; Δn_i - число відмов за інтервал Δt_i .

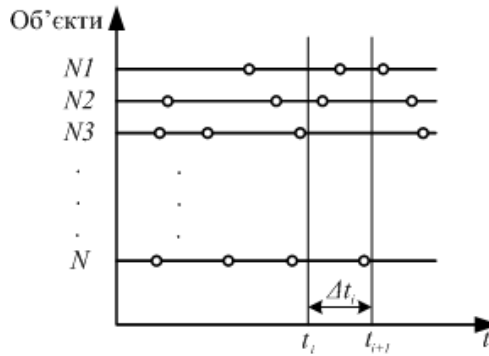


Рис.8.11. Часова діаграма потоку відмов для N – комплектів блоків (апаратури).

Статистичне значення напрацювання на відмову знаходять за формулою

$$m_i = \frac{t_n}{n_n} \quad (8.19)$$

де t_n - загальне напрацювання всіх об'єктів; n_n – загальне число відмов всіх об'єктів. Якщо випробовується K об'єктів на протязі $t_1 \dots t_k$ годин кожен і на протязі цих періодів відбулося $n_1 \dots n_k$ відмов об'єктів, то приймається

$$t_n = \sum_{i=1}^k t_i; n_n = \sum_{i=1}^k r_i \quad (8.20)$$

Значення статистичної інтенсивності відмов за даними експерименту знаходиться з виразу

$$\lambda_i^* = \frac{\Delta n_i}{(N - n_i) \cdot \Delta t_i}, \quad (8.21)$$

де N – загальне число пристроїв, що знаходяться під спостереженням; $n_i = \sum_i \Delta n_i$ - загальне (накопичене) число відмов об'єктів за напрацювання $(0, t_{i-1})$. Результати обчислень зводяться в таблицю 8.7, в якій приведені інтервали Δt_i і відповідне їм значення λ_i^* .

Таблиця 8.7.

Δt_1	Δt_2	...	Δt_i	...	Δt_k
λ_1^*	λ_2^*	...	λ_i^*	...	λ_k^*

На основі цієї таблиці оформляються графіки – гістограми за методикою, запропонованою в лабораторній роботі №1.

За даними експерименту можна визначити густину розподілу напрацювань до відмови $f^*(t)$

$$f_i^* = \frac{\Delta n_i}{N \cdot \Delta t_i} \quad (8.22)$$

З'єднавши одержані для кожного інтервалу напрацювання Δt_i значення f_i^* плавною кривою, отримаємо густину розподілу напрацювання до відмови. Залежність між λ_i^* і f_i^* має наступний вигляд:

$$\lambda_i^* = \frac{\frac{\Delta n_i}{N \cdot \Delta t_i}}{1 - \frac{n_i}{N}} = \frac{f_i^*}{1 - Q_i^*} = \frac{f_i^*}{P_i^*} \quad (8.23)$$

де Q_i^* - ймовірність відмови об'єкту в інтервалі Δt_i ; P_i^* - ймовірність безвідмовної роботи за цей же інтервал (функція надійності).

Розрахунок вибірових розподілів, зв'язаних з випробуванням на надійність (\bar{x}, S^2, R, Mo, Me), побудова полігону частоти гістограм, перевірка гіпотез про характер закону розподілу відмов, побудова довірчих інтервалів проводиться за методикою описаною в лабораторній роботі №1.

8.2. Виконання роботи:

За даними експерименту побудувати емпіричну функцію розподілу і обчислити основні показники надійності виробу:

1. Ймовірність безвідмовної роботи за визначений час;
2. Ймовірність безвідмовної роботи в заданому інтервалі часу;
3. Інтенсивність відмов як функція часу;
4. Середній час роботи до відмови;
5. Визначити густину розподілу напрацювання до відмови.

Для більш усвідомленого виконання лабораторної роботи, приклади побудови довірчих інтервалів наведені нижче. Там же наведений приклад перевірки статистичних гіпотез про розподіл напрацювань на відмову.

Приклад 4. Випробовувалося $N = 20$ пристроїв на протязі 100 годин. Відмовило $n = 2$ пристрої. Побудувати довірчий інтервал для ймовірності P відмови пристрою за 100 годин. Довірча ймовірність має бути 0.95.

Розв'язання.

За таблицею IX додатку знаходимо $\{0.317; 0.012\}$. Звідси $P_n = 0.012$, $P_g = 0.317$, де P_n і P_g – нижній та верхній довірчі інтервали.

Приклад 5. Сумарне напрацювання пристрою певного типу складає $S = 10^5$ годин. За цей час спостерігалось 10 відмов пристроїв. Необхідно побудувати довірчий інтервал для інтенсивності λ відмов пристрою з довірчою ймовірністю 0.95.

Розв'язання.

За таблицею VIII додатку знаходимо довірчий інтервал для $\Lambda (\Lambda = \lambda \cdot S)$. Маємо $A_n = 4.8$ 1/год та $A_g = 18.39$ 1/год. Звідси $\lambda_n = \frac{4.8}{10^5} = 4.8 \cdot 10^{-5}$ 1/год; $\lambda_g = \frac{18.39}{10^5} = 18.4 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Тоді довірчий інтервал для λ з довірчою ймовірністю 0.95 становить $(4.8 \cdot 10^{-5} \leq \lambda \leq 18.4 \cdot 10^{-5})$ 1/год.

Приклад 6. При випробуваннях деякого пристрою, що має час роботи до відмови розподілений за нормальним законом, отримано 10 реалізацій напрацювання до відмови в годинах: 120, 110, 80, 130, 120, 140, 80, 150, 130, 140. Необхідно знайти довірчі межі з довірчою ймовірністю 0.9 ($\alpha = 1$) для середнього напрацювання на відмову і дисперсії σ^2 .

Розв'язання.

Знаходимо

$$\bar{t} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \theta_i = 120 \text{ год.}; S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (\theta_i - \bar{t})^2 = 576 \text{ год.}; S = 24 \text{ год.}$$

Довірчий інтервал для t_{cp}

$$\bar{t} - t_{(n-1); \alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} < t_{cp} < \bar{t} + t_{(n-1); \alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

Значення критерію Стюдента знаходиться з таблиці IV Додатку

$$t_{q; 0.1} = 1.83$$

Тоді $t_{cp, n} = 120 - 1.83 \cdot 8$ - нижнє значення довірчого інтервалу і $t_{cp, g} = 120 + 1.83 \cdot 8$ - верхнє значення; довірчий інтервал $105.4 < t_{cp} < 134.6$.

Довірчий інтервал для дисперсії:

- нижнє значення

$$S_n^2 = \frac{nS^2}{\chi_{(n-1); \alpha/2}^2};$$

- верхнє значення

$$S_g^2 = \frac{nS^2}{\chi_{((n-1); 1-\alpha/2)}^2}.$$

Маємо $n = 10; S^2 = 576; \chi_{(9; 0.05)}^2 = 16.92; \chi_{(9; 0.95)}^2 = 3.33$.

Звідки $S_n^2 = 340; S_g^2 = 1735$ і довірчий інтервал $340 < S^2 < 1735$.

Приклад 7. Нехай в результаті спостереження над деяким пристроєм одержано 42 значення напрацювання на відмову в годинах: 15, 24, 28, 37, 49, 54, 60, 75, 87, 92, 93, 111, 114,

121, 127, 130, 134, 138, 140, 144, 147, 155, 168, 170, 173, 189, 192, 197, 198, 201, 204, 225, 231, 243, 248, 249, 256, 265, 274, 281, 297.

Перевірити гіпотезу про експоненціальність розподілу час напрацювання на відмову.

Розв'язання.

Розбиваємо всі дані експерименту на 6 інтервалів (див. лабораторну роботу №1): [0÷50], [50÷100], [100÷150], [150÷200], [200÷250], [250÷300] з урахуванням того, що дані експерименту не попадають на межі інтервалів (немає значень 50; 100; 150 і т.д.)

Оцінюємо λ за формулою

$$\lambda = \frac{n-1}{\sum_i Q_i} = \frac{41}{6485} = 0.0063 \text{ 1/год.}$$

Обчислюємо m_i і $P_i(\lambda)$. Результати зводимо до таблиці 8.8.

Таблиця 8.8.

Інтервал	m_i	$P_i(\lambda)$	$nP_i(\lambda)$	$\frac{[m_i - nP_i(\lambda)]}{nP_i(\lambda)}$
[0÷50]	5	0.27	11.34	3.51
[50÷100]	6	0.20	8.40	0.62
[100÷150]	11	0.15	6.3	3.86
[150÷200]	8	0.11	4.62	2.16
[200÷250]	7	0.07	2.94	5.41
[250÷300]	5	0.20	8.40	1.43

Підраховуємо

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(m_i - nP_i(\lambda))^2}{nP_i(\lambda)} = 17.04.$$

По даному рівню значимості $\alpha=0.01$, для $N-1$ ступенів свободи знаходимо з таблиці IX додатку

$$\chi_{(5;0.01)}^2 = 15.09.$$

Так як

$$\chi^2 > \chi_{(5;0.01)}^2$$

робимо висновок про малоймовірність, що закон розподілу експоненціальний.

8.3. Зміст звіту

За даними експерименту побудувати варіаційний ряд; часову діаграму потоку відмов для двох комплектів апаратури (дані видаються); Побудувати емпіричну функцію густини розподілу на напрацювання на відмови і гістограму. Визначити закон розподілу відмов і перевірити гіпотезу про характер закону розподілу відмов. Визначити основні показники надійності. Провести аналіз отриманих даних, і навчитися будувати довірчі інтервали.

8.4. Контрольні запитання

1. Що розуміють під надійністю об'єкту?
2. Назвіть основні показники надійності.
3. Як визначити ймовірність безвідмовної роботи в інтервалі часу від 0 до t_0 за даними експерименту.
4. Визначте ймовірність безвідмовної роботи в інтервалі часу від t до $t+t_0$ за даними експерименту.
5. Що розуміють під ймовірністю відмови об'єкту в інтервалі часу від 0 до t_0 і від t до $t+t_0$?
6. Як визначити ймовірність безвідмовної роботи за даними експерименту?
7. Покажіть на часовій діаграмі статистичне пояснення понять ймовірності безвідмовної роботи і ймовірність відмов.
8. Що розуміють під раптовою відмовою, параметричною відмовою?
9. Поясніть графічно смисл формул визначення ймовірностей безвідмовної роботи та ймовірності відмов в інтервалі часу від t до $t+t_0$.
10. Як за даними експерименту визначити густину розподілу відмов об'єкту?
11. Що розуміють під інтенсивністю відмов і як її визначають за даними експерименту?
12. За даними експерименту визначте середній час роботи до відмови.
13. Поясніть на часовій діаграмі статистичне визначення поняття середнього часу роботи до відмови.
14. Поясніть на часовій діаграмі поняття потоку відмов для N блоків.
15. Як визначити за даними експерименту статистичне значення напрацювання на відмову?
16. Перерахуйте основні етапи побудови гістограми за даними експерименту по надійності об'єктів.
17. Оцініть середнє напрацювання до відмови і знайдіть його довірчий інтервал при достовірності 95%.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973. – 120 с.
2. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 284 с.
3. *Бородюк В. П. и др.* Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях: регрессионные модели в прикладных задачах. – М.: Советское радио, 1974. – 168 с.
4. *Дрейнер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ: Пер. с англ. под ред. Адлера Ю. П., Горского В. Г. – М.: Статистика, 1973. -109 с.
5. *Мінцер О. П., Вороненко Ю. В., Власов В. В.* Обробка клінічних і експериментальних даних у медицині. – К.: «Вища школа», 2003. – 340 с.
6. *Яншин А. А.* Теоретические основы конструирования, технологий и надежности ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1983. – 203 с.
7. *Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976. – 173 с.
8. *Егоров А. Е., Азаров Г. Н., Коваль А. В.* Исследование устройств и систем автоматики методом планирования эксперимента. – Х.: «Вища школа», 1986. – 118 с.
9. *Петренко А. И., Синькоп Ю. С., Матросова В. А., Цур А., Ботан Э., Петрашненко А. М.* Моделирование технологических процессов изготовления БИС. – К.: УМК ВО, 1990. – 110 с.
10. *Абакумов В. Г., Рибін О. І., Сватош О., Синькоп Ю. С.* Система відображення в медицині. – К.: ТОО «Век+», 1999. – 297 с.
11. *Абакумов В. Г., Геранін В. О., Рибін О. І., Сватош О., Синькоп Ю. С.* Біомедичні сигнали та їх обробка. – К.: ТОО «Век+», 1997. – 279 с.
12. *Алгоритмы обработки экспериментальных данных.* Отв. редактор И. А. Овсеевич – М.: Наука, 1986. – 185 с.
13. *Шураков В.В., Дайитбегов Д.М., Мизрохи С.В. и др.* Автоматизированное рабочее место для статистической обработки данных. - М.: Финансы и статистика, 1990. -190 с.
14. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.* Статистический анализ данных на компьютере. - М.: ИНФА-М, 1998. - 528 с.
15. *Антомонов М.Ю.* Математическая обработка и анализ медико-биологических данных. - К: Украинская военно-медицинская академия, 2006. - 558 с.
16. *Синькоп Ю.С., Мінцер О.П., Ружицька К.В., Мілін В.Б.* Біометрія – К. : НВФ «March-A», 2008. – 334 с.

17. *Дружинин Г.В.* Надежность автоматизированных систем. - М.: «Энергия», 1977. - 536 с.
18. *Кабатов Ю.Ф., Славин М.Б.* Вероятностно-статистические методы в медицинских исследованиях и надежность медицинской аппаратуры. - М.: Медицина, 1976. - 296 с.
19. *Фомин А.В., Боченков Ю.И., Сорокопуд В.А.* Технология, надежность и автоматизация производства БГИС и микросборок. – М.: Радио и Связь, 1981. – 350 с.

ДОДАТОК І. ЩІЛЬНІСТЬ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛЕННЯ

λ	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	0,3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	0,3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3925
0,3	0,3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	0,3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3405	3467	3448	3429	3410	3391	3371	3352
0,6	0,3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	0,3123	3101	3079	3156	3034	3011	2989	2966	2943	2020
0,8	0,2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	0,2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2374	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	0,2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	0,1942	1919	1895	1872	1949	1926	1804	1781	1758	1736
1,3	0,1714	1619	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	0,1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0940	925	909	893	878	863	848	833	818	804
1,8	0,0700	775	761	748	734	721	707	694	681	669
1,9	0,0656	644	632	620	608	596	584	573	562	551
2,0	0,0540	529	519	508	498	488	478	468	459	449
2,1	0,0440	431	422	413	404	396	387	379	371	363
2,2	0,0355	347	339	332	325	317	310	303	297	290
2,3	0,0283	277	270	264	258	252	246	241	235	229
2,4	0,0224	219	213	208	203	198	194	189	184	180
2,5	0,0175	171	167	163	158	154	151	147	143	139
2,6	0,0136	132	129	126	122	119	116	113	110	107
2,7	0,0104	101	99	96	93	91	88	86	84	81
2,8	0,0079	77	75	73	71	69	67	65	63	61
2,9	0,0060	59	56	55	53	51	50	48	47	46
3,0	0,0044	43	42	40	39	38	37	36	35	34
3,1	0,0033	32	31	30	29	28	27	26	25	25
3,2	0,0024	23	22	22	21	20	20	19	18	18
3,3	0,0017	17	16	16	15	15	14	14	13	13
3,4	0,0012	12	12	11	11	10	10	10	9	9

ДОДАТОК ІІ. ФУНКЦІЯ ЛАПЛАСА

λ	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0,0383	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0,0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	0,1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	0,1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	0,1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	0,2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	0,2580	2691	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	0,2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	0,3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	0,3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	0,3443	3665	3686	3706	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	0,3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	0,4042	4049	4062	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	0,4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4396	4319
1,5	0,4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	0,4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	0,4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	0,4641	4649	4356	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	0,4731	4719	4626	4732	4738	4744	4750	4755	4761	4767
2,0	0,4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	0,4821	4826	4830	4834	4838	4832	4846	4850	4854	4857
2,2	0,4861	4864	4968	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	0,4893	4896	4898	4910	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	0,4911	4920	3922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	0,4938	4940	3941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	0,4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	0,4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	0,4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	0,4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	0,4986	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3,1	0,4990	4991	4991	4991	4992	4992	4922	4922	4993	4993
3,2	0,4993	4994	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995	4995

ДОДАТОК III. КРИТЕРІЙ КОХРЕНА

№	$(\alpha = 5\%)$													
	$f_1 = n - 1$													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	141	∞
2	,9985	,9750	,9392	,9057	,8772	,8534	,8332	,8159	,8010	,7880	,7341	,6602	,5813	,5000
3	,9669	,8709	,7977	,7457	,7071	,6771	,6530	,6333	,6167	,6025	,5466	,4748	,4031	,3333
4	,9065	,7679	,6841	,6287	,5895	,5595	,5365	,5175	,5017	,4884	,4366	,3720	,3093	,2500
5	,8412	,6838	,5981	,5440	,5063	,4783	,4564	,4387	,4241	,4118	,3685	,3066	,2513	,2000
6	,7808	,6161	,5321	,4805	,4447	,4148	,3980	,3817	,3682	,3568	,3135	,2612	,2119	,1667
7	,7271	,5612	,4800	,4307	,3974	,3726	,3555	,3384	,3254	,3154	,2756	,2273	,1833	,1429
8	,6798	,5157	,4377	,3910	,3595	,3362	,3185	,3043	,2926	,2829	,2462	,2020	,1516	,1250
9	,6385	,4775	,4072	,3584	,3286	,3067	,2901	,2768	,2659	,2568	,2226	,1820	,1446	,1111
10	,0020	,4450	,3733	,3311	,3029	,2823	,2666	,2541	,2439	,2353	,2032	,1655	,1308	,1000
12	,5410	,3924	,3264	,2880	,2624	,2439	,2299	,2187	,2098	,2020	,1737	,1403	,1100	,0833
15	,4709	,3346	,2758	,2419	,2195	,2034	,1911	,1815	,1736	,1671	,1429	,1144	,0889	,0667
20	,3894	,2705	,2205	,1921	,1735	,1602	,1601	,1422	,1357	,1303	,1108	,0679	,675	,0500
24	,3434	,2354	,1907	,1656	,1493	,1374	,1256	,1216	,1160	,1113	,0942	,0743	,0567	,0417
30	,2929	,1980	,1593	,1377	,1237	,1137	,1061	,1002	,0958	,0921	,0771	,0604	,0457	,0333
40	,2370	,1576	,1259	,1082	,0968	,0887	,0827	,0780	,0745	,0713	,0595	,0462	,0347	,0250
60	,1737	,1131	,0895	,0765	,0682	,0623	,0583	,0552	,0520	,0497	,0411	,0316	,0234	,0167
120	,0998	,0632	,0495	,0419	,0371	,0337	,0312	,0292	,0279	,0266	,0218	,0165	,0120	,0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
№	$(\alpha = 1\%)$													
	$f_1 = n - 1$													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	141	∞
2	,9999	,9950	,9794	,9586	,9373	,9172	,8988	,8223	,8674	,8539	,7949	,7067	,6062	,5000
3	,9933	,9423	,8831	,8355	,7933	,7606	,7335	,7107	,6912	,6743	,6059	,5153	,4230	,3333
4	,9976	,8643	,7814	,7212	,6761	,6410	,6129	,6897	,6702	,6536	,4884	,4057	,3451	,2500
5	,9279	,7885	,6957	,6329	,5875	,5531	,5259	,5037	,4854	,4697	,4090	,3361	,2644	,2500
6	,8828	,7218	,6258	,5635	,5195	,4866	,4608	,4401	,4229	,4084	,3529	,2858	,2229	,1667
7	,8376	,6644	,5685	,5080	,4659	,4347	,4105	,3911	,3751	,3616	,3105	,2494	,1929	,1429
8	,7945	,6162	,5209	,4627	,4226	,3932	,3704	,3522	,3373	,3248	,2779	,2214	,1700	,1260
9	,7544	,5727	,4810	,4251	,3870	,3592	,3378	,3207	,3067	,2950	,2514	,1992	,1521	,1111
10	,7175	,5358	,4469	,3934	,3572	,3308	,3106	,2945	,2813	,2704	,2297	,1811	,1376	,1000
12	,6528	,4751	,3919	,3428	,3099	,2861	,2680	,2535	,2419	,2320	,1961	,1535	,1157	,0839
15	,5747	,4069	,3317	,2882	,2593	,2386	,2228	,2104	,2002	,1918	,1612	,1251	,0934	,0667
20	,4799	,3297	,2654	,2288	,2048	,1877	,1748	,1646	,1567	,1501	,1248	,0960	,0709	,0500
24	,4247	,2871	,2295	,1970	,1759	,1608	,1495	,1406	,1338	,1283	,1060	,0810	,0595	,0417

30	,3632	,2412	,1913	,1635	,1454	,1327	,1232	,1157	,1100	,1054	,0867	,0659	,0480	,0333
40	,2940	,1915	,1508	,1281	,1135	,1033	,0957	,0898	,0853	,0816	,0668	,0503	,0368	,0250
60	,2151	,1371	,1069	,0902	,0796	,0722	,0668	,0625	,0594	,0567	,0461	,0344	,0245	,0167
120	,1252	,0759	,0585	,0189	,0429	,0387	,0337	,0334	,0316	,0302	,0242	,0178	,0125	,0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

ДОДАТОК IV. КРИТЕРІЙ СТ'ЮДЕНТА

$f_1 = N(n - 1)$	Рівень значності α , %							
	20	10	5	2	1	0,5	0,2	0,1
1	3,0770	6,3130	12,7060	31,820	63,656	127,656	318,306	36,619
2	1,8850	2,9200	4,3020	6,964	9,924	14,089	22,327	31,599
3	,6377	,3534	3,182	4,540	5,840	7,458	10,214	12,924
4	,5332	,1318	2,776	3,746	4,604	5,597	7,173	8,610
5	,4759	,0150	2,570	3,649	,032	4,773	5,893	6,863
6	1,4390	1,943	2,446	3,142	3,707	4,316	5,207	5,958
7	,4149	,6946	,3646	2,998	,4995	,2293	4,785	,4079
8	,3968	,8596	,3060	,8965	,3554	3,832	,5008	,0413
9	,3830	,8331	,2622	,8214	,2498	,6897	,2968	4,780
10	,3720	,8125	,2281	,7638	,1693	,5814	,1437	,5669
11	1,363	1,795	2,201	2,718	3,105	3,496	4,024	4,437
12	,3562	,7823	,1788	,6810	,0845	,4284	3,929	,3178
13	,3502	,7709	,1604	,6503	,1123	,3725	3,852	,2208
14	,3450	,7613	,1448	,6245	2,976	,3257	3,787	,1405
15	,3406	,7530	,1314	,6025	,9467	,2860	9,732	,0728
16	1,3360	1,7450	2,1190	2,583	2,920	3,252	3,686	4,015
17	,3334	,7396	,1098	,5668	,8982	,2224	,6458	3,965
18	,3304	,7341	,1009	,5514	,8784	,1966	,6105	,9216
19	,3277	,7291	,0930	,5395	,8609	,1737	,5794	,8834
20	,3253	,7247	,0860	,5280	8453	,1534	,5518	,8495
21	1,3230	1,7200	2,0790	2,517	2,831	3,135	3,527	3,819
22	,3212	,7117	,0739	,5083	,8188	,1188	,5050	,7921
23	,3195	,7139	,0687	,4999	,8073	,1040	,4850	,7676
24	,1378	,7109	,0639	,4922	,7969	,0905	,4668	,7454
25	,3163	,7061	,0595	,4851	,7874	,0782	,4502	,7251
26	1,315	1,705	2,059	2,478	2,778	3,066	3,436	3,706
27	,3137	,7033	,0518	,4727	,7707	,0565	,4210	,6896
28	,3125	,7011	,0484	,4671	,7633	,0469	,4082	,6739
29	,3114	,6991	,0452	,4620	,7564	,0360	,3962	,8494
30	,3104	,6973	,0423	,4573	,7500	,0298	,3852	,6460

$f_1 = N(n - 1)$	Рівень значості α , %							
	20	10	5	2	1	0,5	0,2	0,1
32	1,3080	1,6930	2,0360	2,4480	2,7380	3,0140	3,3650	3,6210
34	,3070	,6909	,0322	,4411	,7284	,9520	,3470	,6007
36	,3050	,6883	,0281	,4345	,7195	9,4900	,3326	,5821
38	,3042	,6860	,0244	,4286	,7116	,9808	,3190	,5657
40	,3031	,6839	,0211	,4233	,7045	,9712	,3069	,5510
42	1,3200	1,6620	2,0180	2,4180	2,6980	2,6930	3,2960	3,5370
44	,3011	,6802	,0154	,4141	,6923	,9555	,2861	,5258
46	,3002	,6767	,0129	,4102	,6870	,9488	,2771	,5150
48	,2994	,6772	,0106	,4056	,6822	,9426	,2689	,5051
50	,2987	,6759	,0086	,4033	,6778	,9370	,2614	,4060
55	1,9970	1,6730	2,0040	2,3960	2,6680	2,9240	3,2560	3,4760
60	,2958	,6706	,0003	,3901	,6603	,9146	,2317	,4602
65	,2947	,6686	1,997	,3851	,6536	,9060	,2204	,4066
70	,2938	,6689	,9944	,3808	,6479	,8987	,2108	,4350
80	1,2820	1,6640	1,9900	2,3730	2,638	2,8870	3,1950	3,4160
90	,2910	,6620	,9867	,3885	,6316	,8779	,1833	,4019
100	,2901	,6602	,9860	,3642	,6259	,8707	,1737	,3905
120	,2888	,6577	,9799	,3578	,6174	,8598	,1595	,3735
150	,2872	,6551	,9759	,3515	,6090	,8482	,1455	,3566
200	,2858	,6525	,9719	,3451	,6006	,8385	,1315	,3398
250	,2849	,6510	,9695	,3414	,5966	,8222	,1232	,3299
300	,2844	,6499	,9679	,3368	,5923	,8279	,1176	,3233
400	,2837	,6487	,9659	,3357	,5882	,8227	,1107	,3150
500	1,2830	1,6470	1,9640	2,3330	2,7850	2,8190	3,1060	3,3100

ДОДАТОК V. КРИТЕРІЙ ФІШЕРА

$f_1 = N(n - 1)$	$(\alpha = 5\%)$								
	$f_2 = N - 1$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	6,84	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,28	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72
14	4,60	3,74	3,34	3,31	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,66	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30
25	4,26	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,06	2,01	1,95
	3,64	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88

$f_1 = N(n - 1)$	$(\alpha = 1\%)$								
	$f_2 = N - K$ (велика дисперсія)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022
2	38,49	99,05	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38
3	23,12	38,81	29,46	28,71	28,24	27,91	26,6	27,49	27,34
4	21,20	18,00	16,90	15,28	15,52	15,21	14,90	14,80	14,66
5	16,28	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71
8	11,26	8,65	7,59	7,04	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95
11	9,35	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,69	4,46	4,28	4,14
15	8,68	6,38	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,47	4,44	4,29	2,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,85	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,71	3,56	3,45
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,65	3,51	3,40
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,25
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,31
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,17
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,79	3,56	3,39	3,26	3,14
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,76	3,53	3,36	3,23	3,11
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,08
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,06
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,88
60	7,08	4,08	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,79	2,65	2,65
	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41

ДОДАТОК VI. ФУНКЦІЯ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

x	0,	1,	2,	3,
,00	0,500	0,841	0,9773	0,9 ² 865
,05	520	853	798	886
,10	540	864	821	0,9 ³ 032
,15	560	875	842	184
,20	573	885	861	313
,25	599	894	878	423
,30	618	0,9032	893	517
,35	637	115	906	596
,40	655	192	0,9 ² 180	663
,45	674	265	286	720
,50	692	332	379	767
,55	709	394	461	807
,60	726	452	534	841
,65	742	505	598	860
,70	758	554	653	892
,75	773	599	702	912
,80	788	641	745	0,9 ⁴ 277
,85	802	678	781	409
,90	816	713	813	519
,95	829	744	841	609

ДОДАТОК VII. ГУСТИНА НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

x	0,	1,	2,
,00	0,399	0,242	0,0540
,05	398	230	488
,10	397	218	440
,15	395	206	396
,20	391	194	355
,25	387	183	317

,30	381	171	283
,35	375	160	252
,40	368	150	224
,45	361	140	198
,50	352	130	175
,55	343	120	155
,60	333	111	136
,65	323	102	119
,70	312	0,0941	104
,75	301	863	0,0 ² 910
,80	290	790	792
,85	278	721	687
,90	266	656	595
,95	254	596	514

ДОДАТОК VIII. ДОВІРЧІ ГРАНИЦІ ДЛЯ ПАРАМЕТРУ λ РОЗПОДІЛУ ПУАСОНА

Кількість відмов n	Коефіцієнт довіри							
	0,999		0,99		0,95		0,90	
0	7,60	0,0000	5,30	0,0000	3,09	0,0000	3,00	0,0000
1	10,00	0,0005	7,43	0,0050	5,57	0,0253	4,74	0,0513
2	12,05	0,0320	9,27	0,103	7,22	0,242	6,30	0,355
3	13,93	0,149	10,98	0,338	8,77	0,619	7,75	0,818
4	15,71	0,355	12,59	0,672	10,24	1,09	9,15	1,37
5	17,41	0,63	14,15	1,08	11,67	1,62	10,51	1,97
6	19,05	0,97	15,66	1,54	13,06	2,20	11,84	2,61
7	20,65	1,35	17,13	2,04	14,42	2,81	13,15	3,29
8	22,22	1,77	18,58	2,57	15,76	3,45	14,43	3,93
9	23,75	2,22	20,00	3,13	17,08	4,12	15,71	4,70
10	25,26	2,70	21,40	3,72	18,39	4,80	16,96	5,43
11	26,74	3,20	22,78	4,32	19,68	5,49	18,21	6,17
12	28,20	3,73	24,14	4,94	20,96	6,20	19,44	6,92
13	29,65	4,27	25,50	5,58	22,23	6,92	20,67	7,69
14	31,08	4,83	26,84	6,23	23,49	7,65	21,89	8,4
15	32,50	5,40	28,16	6,89	24,74	8,40	23,10	9,25

16	33,90	5,99	29,48	7,57	25,98	9,15	24,30	10,04
17	35,29	6,59	30,79	8,25	27,22	9,90	25,50	10,83
18	36,68	7,20	32,09	8,94	28,45	10,67	26,69	11,63
19	38,05	7,82	33,38	9,64	29,67	11,44	27,88	12,41
20	39,41	8,45	34,67	10,35	30,89	12,22	29,06	13,25
21	40,76	9,09	35,95	11,07	32,10	13,00	30,24	14,07
22	42,11	9,74	37,22	11,79	33,31	13,79	31,42	14,89
23	43,45	10,40	38,48	12,52	34,51	14,58	32,59	15,72
24	44,78	11,06	39,74	13,25	35,71	15,38	33,75	16,55
25	46,11	11,43	41,00	14,00	36,90	16,18	34,92	17,33
26	47,42	12,41	42,25	14,74	38,10	16,98	36,08	18,22
27	48,74	13,09	43,50	15,49	39,28	17,79	37,23	19,06
28	50,05	13,78	44,74	16,24	40,47	18,61	38,39	19,90
29	51,35	14,47	45,98	17,00	41,65	19,42	39,54	20,75
30	52,64	15,17	47,21	17,77	42,83	20,24	40,69	21,59

**ДОДАТОК ІХ. ДОВІРЧІ ГРАНИЦІ ДЛЯ ПАРАМЕТРУ Р
БІНОМІАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ. КОЕФІЦІЄНТ ДОВІРИ 0,95.**

<i>N-n</i>	<i>n</i>						
	0	1	2	3	4	5	6
1	0,975 0,000	0,987 0,013	0,992 0,094	0,994 0,194	0,995 0,284	0,996 0,359	0,996 0,421
2	0,842 0,000	0,906 0,008	0,932 0,068	0,947 0,147	0,957 0,223	0,963 0,290	0,968 0,349
3	0,708 0,000	0,806 0,006	0,853 0,053	0,882 0,118	0,901 0,184	0,913 0,245	0,925 0,299
4	0,602 0,000	0,716 0,005	0,777 0,043	0,816 0,099	0,843 0,157	0,863 0,212	0,878 0,262
5	0,522 0,000	0,641 0,004	0,710 0,037	0,755 0,085	0,788 0,137	0,813 0,187	0,833 0,234
6	0,459 0,000	0,579 0,004	0,651 0,032	0,701 0,075	0,738 0,122	0,766 0,167	0,789 0,211
7	0,410 0,000	0,527 0,003	0,600 0,028	0,652 0,067	0,692 0,109	0,723 0,151	0,749 0,192
8	0,369 0,000	0,483 0,003	0,556 0,025	0,610 0,060	0,651 0,099	0,684 0,139	0,711 0,177
9	0,336 0,000	0,445 0,003	0,518 0,023	0,572 0,055	0,614 0,091	0,649 0,128	0,677 0,163
10	0,308 0,000	0,413 0,002	0,484 0,021	0,538 0,050	0,581 0,084	0,616 0,118	0,646 0,152
11	0,285 0,000	0,385 0,002	0,454 0,019	0,508 0,047	0,551 0,078	0,587 0,110	0,617 0,142
12	0,265 0,000	0,360 0,002	0,428 0,018	0,481 0,043	0,524 0,073	0,560 0,103	0,590 0,133
13	0,247 0,000	0,339 0,002	0,405 0,017	0,456 0,040	0,499 0,068	0,535 0,097	0,565 0,126
14	0,232 0,000	0,319 0,002	0,383 0,016	0,434 0,038	0,476 0,064	0,512 0,091	0,543 0,119
15	0,218 0,000	0,302 0,002	0,364 0,015	0,414 0,036	0,456 0,061	0,491 0,087	0,522 0,113
16	0,206	0,287	0,347	0,396	0,437	0,471	0,502

	0,000	0,001	0,014	0,034	0,057	0,082	0,107
17	0,195	0,273	0,331	0,379	0,419	0,453	0,484
	0,000	0,001	0,013	0,032	0,054	0,078	0,102
18	0,185	0,260	0,317	0,363	0,403	0,436	0,467
	0,000	0,001	0,012	0,030	0,052	0,075	0,098
19	0,176	0,249	0,304	0,349	0,388	0,421	0,451
	0,000	0,001	0,012	0,029	0,050	0,071	0,094
20	0,168	0,238	0,292	0,336	0,374	0,407	0,436
	0,000	0,001	0,011	0,028	0,047	0,068	0,090
21	0,161	0,228	0,280	0,324	0,360	0,393	0,423
	0,000	0,001	0,011	0,027	0,045	0,066	0,086
22	0,154	0,219	0,270	0,312	0,349	0,381	0,410
	0,000	0,001	0,010	0,025	0,044	0,063	0,083
23	0,148	0,211	0,260	0,301	0,338	0,369	0,397
	0,000	0,001	0,010	0,024	0,042	0,061	0,080
24	0,142	0,203	0,251	0,292	0,327	0,358	0,386
	0,000	0,001	0,009	0,024	0,040	0,058	0,077

ДОДАТОК Х. ОПИС ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЇ УСТАНОВКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ПО КУРСУ: «ІНЖЕНЕРІЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ»

В процесі експерименту коефіцієнт підсилення визначається як відношення вихідної та вхідної напруги підсилювального каскаду. Підсилювач досліджується за допомогою установки, зображеної на рис.2.

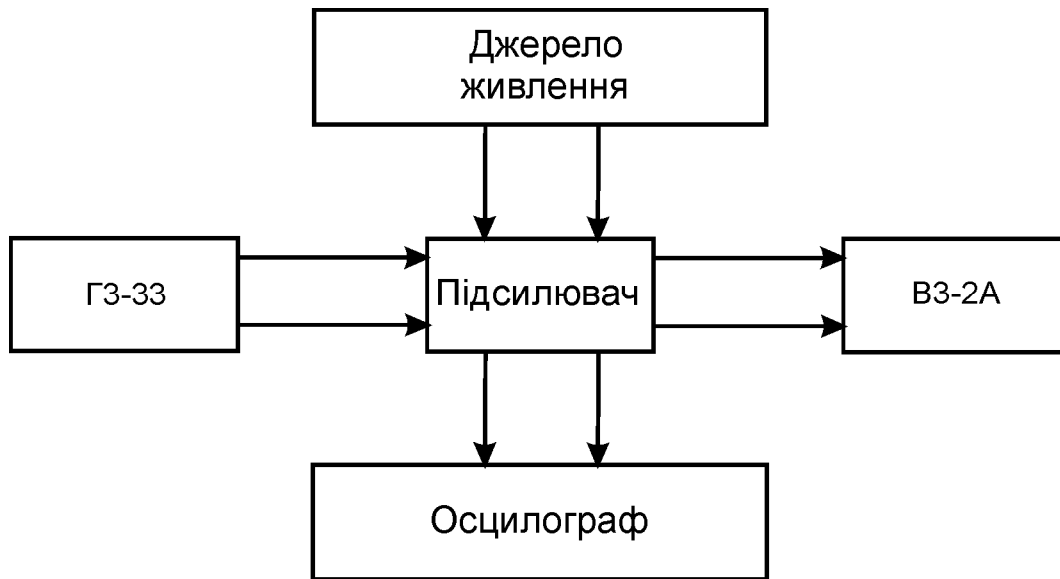


Рис.2. Схема експериментальної установки для дослідження ПНЧ.

Частота вхідного сигналу $f = 1000 \text{ Гц}$ задається генератором ГЗ-33, $U_{\text{вх}} = 20 \text{ мВ}$. Вихідний сигнал вимірюється вольтметром ВЗ-2А класу точності $K = 2.5\%$ за шкалою 1 В , так що основна абсолютна похибка вимірювання вихідної напруги $\Delta U_{\text{вих}} = 25 \text{ мВ}$, а його середньоквадратична похибка:

$$\sigma_{U_{\text{вих}}} = \frac{\Delta U_{\text{вих}}}{3} \approx 0,01 \text{ В}.$$

Вхідний сигнал в процесі експерименту встановлюється один раз по шкалі 30 мВ .

Підсилювач живиться від стабілізованого джерела типу «Електроніка», що дозволяє не враховувати коливання напруги в мережі. Процеси в різних точках підсилювача контролюються за допомогою осцилографа. Положення робочої точки підсилювача вибрано так, що при заданих вхідному сигналі та опорі навантаження підсилювач працює в лінійному режимі.

Опори всіх резисторів встановлюються за допомогою магазинів опорів класу $0,2$.

За допомогою установки, зображеної на рис. 2, можуть бути досліджені і інші схеми, які застосовуються в біомедичній електроніці.

Метою проведення експерименту є отримання математичної моделі підсилювача низької частоти, підсилювача з позитивним та негативним зворотним зв'язком, активного RC-фільтру, вимірювання резисторів та ємностей для статичної обробки даних досліджень і т.д.

Наприклад, для підсилювача низької частоти – це визначення залежності підсилення за напругою від параметрів транзистора та пасивних елементів. В даному прикладі № є коефіцієнт підсилення K_U . Однак, в залежності від того, яка задача розв'язується, № може бути вхідний чи вихідний опір, смуга пропускання підсилювача чи інша характеристика.

В якості факторів потрібно вибирати параметри пасивних та активних елементів, які суттєво впливають на реакції схеми. Для розглядуваної схеми (рис. 1) однофакторний експеримент показує, що при зміні опорів $R_1 - R_5$ та напруги живлення на 10-20% коефіцієнт підсилення змінюється на 2-10%, тобто виробниче відхилення параметрів резисторів другого та третього класів точності суттєво впливає на K_U . Тому приймається рішення прийняти до розгляду всі п'ять опорів.

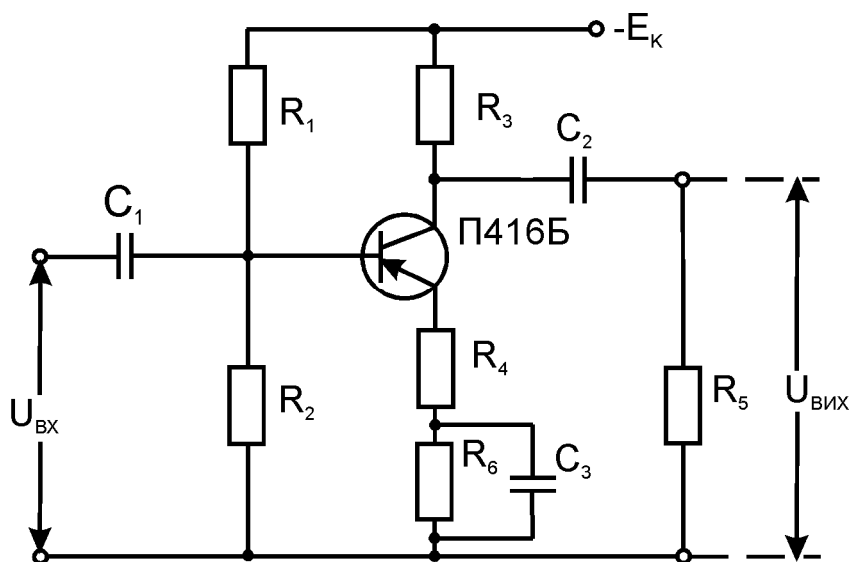


Рис. 1. Принципова схема підсилювача.

Транзистори зазвичай мають великий розмах параметрів. Наприклад, коефіцієнт підсилення за струмом в схемі ОЕ транзистора П416Б за паспортними даними лежить в діапазоні 70-240. Для експерименту вибрані транзистори з коефіцієнтами підсилення за струмом $\beta_H = 70$, $\beta_0 = 140$, $\beta_B = 210$. Транзисторний підсилювач з вказаним значенням β має різні коефіцієнти підсилення. Тому в якості останнього фактору приймається коефіцієнт підсилення транзистора за струмом β . Взагалі параметром активного елементу може бути будь-який параметр, який можна виміряти. В роботі [25] пропонується так званий узагальнений параметр, який для кожного приладу (підсилювача, генератора, фільтру) є випадковою фізичною величиною. Характер розподілу узагальненого параметру

встановлюється експериментально організацією вибірки з 50–100 значень вихідного параметру схеми при різних активних елементах. Таким чином, отримання узагальненого параметру активного елементу для даної схеми пов'язано з отриманням великого статистичного матеріалу на реальних пристроях, що не завжди можливо через умови роботи.

Розглянемо оптимізацію підсилювача низької частоти (ПНЧ). Досліджуваний підсилювач (рис.1) зібрано на транзисторі П416Б з коефіцієнтом підсилення за струмом в схемі зі спільним емітером $\beta = 210$. Режим роботи підсилювача визначається значеннями опорів $R_1 = 90$; $R_2 = 5,5$; $R_3 = 2,3$; $R_5 = 4$ кОм, емітерного опору $R_6 = 300$ Ом та опору зворотного зв'язку $R_4 = 20$ Ом. Вхідна напруга $U_{ВХ} = 20$ мВ. Підсилювач працює в класі А, напруга живлення $E_{ЖИВ} = 10$ В.

Ціль оптимізації – вибір таких значень опорів, при яких вихідна потужність максимальна, тобто в якості параметру оптимізації приймається $P_{ВИХ} = U_{ВИХ} \cdot I_{ВИХ} = \max$. Так як опір навантаження є активним та постійним ($R_5 = \text{const}$), то $P_{ВИХ} = U_{ВИХ}^2 / R_5$. Отже, максимум вихідної потужності відповідає $U_{ВИХ} = \max$. Таким чином, в якості реакції, яка підлягає оптимізації, вибираємо вхідний опір $y = U_{ВИХ}$.

В попередньому експерименті було встановлено, що найбільший вплив на відгук, окрім напруги живлення і опору зворотного зв'язку, мають опори R_2 , R_3 . Через це оптимізації підлягає вихідна напруга як функція опорів R_2 , R_3 , які позначаються буквами X_1 , X_2 відповідно. В процесі оптимізації необхідно виконати умову лінійності роботи підсилювача.

В якості вихідної вибирається точка $X_1^0 = R_2 = 5,5$ кОм, $X_2^0 = R_3 = 2,3$ кОм. Опори задаються за допомогою магазинів опорів, вхідна та вихідна напруга вимірюються мілівольтметром ВЗ-38 класу 2,5. Умови експерименту і дані кодування факторів представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

Умови експерименту

Величина	Фактор	
	$X_1 = R_1$, кОм	$X_2 = R_3$, кОм
Основний рівень X_i^0	5,5	2,3
Інтервал варіації h_i	0,3	0,2
Нижній рівень X_{iH}	5,2	2,1
Верхній рівень X_{iB}	5,8	2,5
Кодоване позначення фактору x_i	x_1	x_2